NAK. Soit M un module de type fini sur un anneau local $(R, \mathfrak{m}, k)$. Alors M est engendré par les relèvement à M de générateurs de $M/\mathfrak{m}M = M \otimes_R k$. En particulier $\mu(M) = \dim_k(M \otimes_R k)$ est le nombre minimal de générateurs de M.

Lemme 1. Soit R est un anneau et $\phi : N \to M$ un homomorphisme surjectif de R-modules. Si M est de présentation finie et N est de type fini, alors $\ker(\phi)$ est de type fini. Si R est local et $L_1 \to L_0 \to M \to 0$ une présentation de M, $\mu(\ker(\phi)) \le \mu(N) + \mu(L_1)$.

Preuve. (Matsumura 2.6). On regarde le diagramme

$$\begin{tikzcd} & L_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & L_0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker(\phi) \arrow[r] & N \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Pour chaque générateur ξ_i de N on choisit $v_i \in L_0$ ayant même image dans M. Notant η_i un élément de $\ker(\phi)$ ayant comme image $\xi_i - \alpha(v_i)$ on vérifie que $\ker(\phi)$ est engendré par les η_i et $\beta(L_1)$.

Corollaire. Si $L_\bullet$ est un complexe de R-modules libres de type fini et R est cohérent, son homologie est cohérente.

Preuve. En appliquant le Lemme 1 à $L_i \to \mathrm{im}(d_i) \subseteq L_{i-1}$, où, par cohérence de B, $\mathrm{im}(d_i)$ est de présentation finie on obtient que $\ker(d_i)$ est de présentation finie pour tout i. D'où une présentation finie de $H_i(L_\bullet)$ la flèche $L_{i+1} \to \ker(d_i)$ se remontant à tout module libre qui s'envoie sur $\ker(d_i)$.

Def. On dit que M est de m-présentation finie s'il existe

$$L_m \to L_{m-1} \to \cdots \to L_0 \to M \to 0$$

exacte avec L_i libre de type fini pour tout i.

présentation finie = 1-présentation finie.

∞-présentation finie = m-présentation finie pour tout $m \in \mathbf{N}$.

Th. 1. Si R est Noethérien, tout module de type fini est de ∞-présentation finie.
Si R est cohérent, tout R-module de présentation finie est de ∞-présentation finie.
De plus si R est gradué et M un R-module gradué de présentation finie.
(1) Il existe une présentation graduée libre de type fini de M : $L_1 \to L_0 \to M \to 0$.
(2) Si R est gradué et cohérent, et $M := \mathrm{coker}(L_1 \to L_0)$ avec L_1 et L_0 gradués libres, il existe une ∞-présentation graduée libre finie prolongeant celle donnée.

Preuve. Puisque M est gradué de type fini, il existe $L_0 \to M$ surjectif avec L_0 gradué libre. Par le lemme, $\ker(L_0 \to M)$ est de type fini, et gradué. D'où l'existence de L_1 et la preuve de (1).

(2) se prouve aisément par récurrence sur $i \geq 1$, comme dans le corollaire.

Soit A un anneau commutatif unitaire, $B := A[X_1, \ldots, X_n]$ et B_+ l'idéal $(X_1, \ldots, X_n)$.

Complexe de Čech : Soit $f := (f_1, \ldots, f_t)$ et

$$\mathcal{C}_f^\bullet(M): \; 0 \to M \to \oplus_i M_{f_i} \xrightarrow{\phi} \oplus_{i<j} M_{f_i f_j} \to \cdots \to M_{f_1 \cdots f_t} \to 0$$

dont l'homologie ne dépend que du radical de l'idéal engendré par les f_i. Si l'idéal engendré par les f_i a même radical que B_+, $\ker(\phi)$ s'identifie à $\Gamma_* M := \oplus_{\mu \in \mathbf{Z}} H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{F}(\mu))$. D'où une suite exacte:

$$0 \to H^0_{B_+}(M) \to M \to \Gamma_* M \to H^1_{B_+}(M) \to 0$$

et des isomorphismes (de degré 0) $H^i_{B_+}(M) = \oplus_{\mu \in \mathbf{Z}} H^{i-1}(\mathbf{P}^n, \mathcal{F}(\mu))$, pour $i \geq 2$.

Le choix naturel est bien sûr de prendre $f := X := (X_1, \ldots, X_n)$.

Th. 2. Soit M un B-module gradué de présentation finie. Si B est cohérent, alors
(1) pour tout entier μ, $H^i_{B_+}(M)_\mu$ est cohérent,
(2) il existe μ_0 tel que $H^i_{B_+}(M)_\mu = 0$, pour tout i si $\mu \geq \mu_0$.

Preuve. D'après le Th. 1, il existe $L_\bullet$ garduée libre avec L_i de type fini qui résoud M. Les deux suites spectrales associées au complexe double $\mathcal{C}_X^\bullet L_\bullet$ aboutissent au cran deux et fournissent un isomorphisme gradué

$$H^i_{B_+}(M) \simeq H_{n-i}(H^n_{B_+}(L_\bullet))$$

qui implique (1) en vertu du Corollaire, car $H^n_{B_+}(L_i)_\mu$ est un A-module libre de type fini pour tout i et tout μ.

De plus L_i est pour tout i une somme directe finie de copies de modules de la forme $B(-j)$. Notant J le maximum des j tels que $B(-j)$ apparait dans un L_i avec $0 \leq i \leq n$, on a $H^n_{B_+}(L_i)_\mu = 0$ pour $0 \leq i \leq n$ et $\mu > J - n$, d'où le résultat avec $\mu_0 := J - n + 1$.

Concrètement, cela permet de calculer la cohomologie à partir d'une résolution libre. On regarde la duale dans B de $L_\bullet$:

$$0 \to L_0^\vee \to L_1^\vee \to \cdots$$

dont les matrices sont les tranposées de celles de $L_\bullet$. Puis sa composante de degré $-\mu - n$, qui est un complexe de A-modules libres :

$$(L_\bullet^\vee)_{-\mu-n} := \; 0 \to F_0 \to F_1 \to \cdots$$

que l'on dualise dans A : $\to F_1^* \to F_0^* \to 0$ dont le $(n-i)$-ième groupe d'homologie s'identifie à $H^i_{B_+}(M)_\mu$, donc à $H^{i-1}(\mathbf{P}^n, \mathcal{F}(\mu))$ si $i \geq 2$. Noter aussi que l'isomorphisme $H^i_{B_+}(M)_\mu \simeq H^{i-1}(\mathbf{P}^n, \mathcal{F}(\mu))$ est valable pour tout i en remplaçant M par un tronqué $M_{\geq \nu}$ avec $\nu > \mu$.

Corollaire. Si M est un B-module gradué de présentation fini et B est cohérent, notant $\mathcal{F}$ le faisceau associé sur $X := \mathrm{Proj}(B)$,
(1) $H^i(X, \mathcal{F}(\mu))$ est de présentation finie pout tout i et tout μ,
(2) il existe μ_0 tel que pour $\mu \geq \mu_0$, $H^i(X, \mathcal{F}(\mu)) = 0$ si $i > 0$ et $H^0(X, \mathcal{F}(\mu)) = \widetilde{M_\mu}$.

On remarque aussi que le Théorème et le Corollaire sont valables si A est cohérent et M est de n-présentation finie.

Régularité de Castelnuovo-Mumford

Soit M un B-module gradué, $a^i(M) := \sup\{\mu \mid H^i_{B_+}(M)_\mu \neq 0\}$ (ou $-\infty$) et $b_i(M) := \sup\{\mu \mid \mathrm{Tor}_i^B(M, A)_\mu \neq 0\}$ (ou $-\infty$). On pose

$$\mathrm{reg}(M) := \max_i\{a^i(M) + i\} = \max\{b_i(M) - i\} \in \mathbf{Z} \cup \{\pm\infty\}.$$

On a vu que, si B est cohérent et $M \neq 0$ de présentation finie, $\mathrm{reg}(M) \in \mathbf{Z}$.

Lemme 2. Si $L_\bullet$ est une résolution graduée libre de M, L_i a pour sommant $R(-\mu)$ si $\mathrm{Tor}_i^B(M, A)_\mu \neq 0$. De plus, si $M_\mu = 0$ pour $\mu \ll 0$, il existe une résolution graduée libre de M avec pour seuls sommants de L_i des copies de $R(-\mu)$ avec μ tel que $\mathrm{Tor}_j^B(M, A)_\mu \neq 0$ pour un $j \leq i$.

Preuve. Soit K défini par

$$0 \to K \to L_0 \to M \to 0$$

on note que $L_0 \otimes_B A \to M \otimes_B A$ est surjectif. Puisque $(L_0 \otimes_B A)_\mu \neq 0$ si et seulement si $B(-\mu)$ est facteur direct de L_0, le résultat est vrai pour $i = 0$. D'autre part $\cdots \to L_1 \to K \to 0$ est une résolution de K, $\mathrm{Tor}_1^B(M, A) \hookrightarrow K \otimes_B A$ et $\mathrm{Tor}_i^B(M, A) \simeq \mathrm{Tor}_{i-1}^B(K, A)$ pour $i \geq 2$, ce qui donne le résultat par récurrence sur i.

Pour monter l'existence de $L_\bullet$ on choisi $L_0 \to M$ t.q. $L_0 \otimes_B A \to M \otimes_B A \to 0$ et on note que $L_0 \to M \to 0$ car un élément qui ne ferait pas partie de l'image se remonte en degré arbitrairement négatif, donc serait nul.

Ensuite, on replace M par K et on note que $K_\mu = 0$ pour $\mu \ll 0$ et que l'on a une suite exacte $0 \to \mathrm{Tor}_1^B(M, A) \to K \otimes_B A \to L_0 \otimes_B A$ qui montre que $(K \otimes_B A)_\mu = 0$ pour μ t.q. $\mathrm{Tor}_1^B(M, A)_\mu = (M \otimes_B A)_\mu = 0$ (par construction de L_0).

Comme corollaire : si M est de n-présentation finie, M est de régularité finie.

Tronqués. Soit M un module gradué, $\mu \in \mathbf{Z}$ et $M' := M_{\geq \mu}$. Du calcul de Tor comme homologie du complexe de Koszul (gradué) $K_\bullet(X; —)$, on déduit que :

$\mathrm{Tor}_i^B(M', A)_\nu = 0$ pour $\nu < \mu + i$, $\mathrm{Tor}_i^B(M', A)_\nu = \mathrm{Tor}_i^B(M, A)_\nu$ pour $\nu > \mu + i$ et on a une suite exacte :

$$M_\mu^{\binom{n}{i}} \to \mathrm{Tor}_i^B(M', A)_{\mu+i} \to \mathrm{Tor}_i^B(M, A)_{\mu+i} \to 0.$$

En particulier $\mathrm{reg}(M') = \max\{\mu, \mathrm{reg}(M)\}$ si $M' \neq 0$.

Comme application on voit que pour tout $\mu \geq \mathrm{reg}(M)$ le module M' à une présentation $L_1 \to L_0 \to M \to 0$, où L_0 est une somme directe de copies de $R(-\mu)$, L_1 est une somme directe de copies de $R(-\mu)$ et $R(-\mu - 1)$ et la matrice de l'application à deux blocs, un composé d'éléments de A et l'autre composé de formes linéaires en les X_i à coefficients dans A.

Th. 3. Soit M de régularité finie. Les assertions suivantes sont équivalentes.
(i) $\mathcal{F}$ est plat sur $\mathrm{Spec}(A)$,
(ii) M_μ est plat sur A, pour tout $\mu > \mathrm{reg}(M)$.

Preuve. Seul (i)$\Rightarrow$(ii) est à montrer.

Soit $L_\bullet$ une résolution graduée libre de M avec L_i engendré en degré au plus $\mu - 1 + \min\{i, n\}$ (Lemme 2).

Pour tout A-module N, et tous $i > 0$ et j, $\mathrm{Tor}_i^A(M_{X_j}, N) = 0$. Il s'ensuit que la suite spectrale associée à $\mathcal{C}_X^\bullet L_\bullet \otimes_A N$ ayant pour second terme

$$'_2E_q^p = H_{S_+}^p(\mathrm{Tor}_q^R(M, N))$$

aboutit au cran 2, car $'_2E_q^p = 0$ sauf si $p = 0$ et $q > 0$, auquel cas $'_2E_q^0 = \mathrm{Tor}_q^R(M, N)$ ou $q = 0$ auquel cas $'_2E_0^p = H_{S_+}^p(M \otimes_A N)$.

En particulier, $('_\infty E_1^0)_\mu = ('_2E_1^0)_\mu = \mathrm{Tor}_1^R(M_\mu, N)$.

L'autre suite spectrale a pour premier terme

$$''_1E_q^p = H_{S_+}^p(L_q \otimes_A N)$$

et ce module est nul pour $p \neq n$. De plus $H_{S_+}^n(L_q \otimes_A N)_\nu = 0$ pour $\nu > \mu - 1 + \min\{q, n\} - n$, donc pour $\nu \geq \mu$. Prenant $q = n + 1$, il s'ensuite que $(''_1E_{n+1}^n)_\mu = 0$, d'où $('_\infty E_1^0)_\mu = (''_\infty E_{n+1}^n)_\mu = 0$ ce qui prouve (ii).

Dimension cohomologique.

Lemme 3. Soit $A \to B$ un homomorhisme d'anneaux, M un B-module de type fini et N un A-module de type fini, alors, pour tout i,

$$\mathrm{Supp}_B(\mathrm{Tor}_i^A(M, N)) \subseteq \mathrm{Supp}_B(M \otimes_A N) = \mathrm{Supp}_B(M) \cap \phi^{-1}(\mathrm{Supp}_A(N)),$$

où $\phi : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ est induit par $A \to B$.

Preuve. Bourbaki Algèbre Commutative, II, §4, N°4 Prop. 18 et 19.

Soit $\mathrm{cd}_{B_+}(M) := \max\{i,\ H_{B_+}^i(M) \neq 0\}$ la dimension cohomologique de M (relativement à B_+).

Lemme 4. Si M est de présentation finie, pour tout N tel que $\mathrm{Supp}(N) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$, on a $\mathrm{cd}_{B_+}(N) \leq \mathrm{cd}_{B_+}(M)$.

Preuve. C'est clair si B est Noethérien et M et N de type fini, car dans ce cas on voit aisément que $\mathrm{cd}_{B_+}(M) = \mathrm{cd}_{B_+}(B/\mathrm{ann}_B(M))$ et N est annulé par une puissance de l'annulateur de M. Dans le cas Noethérien, sans finitude de N voir Divaani-Aazar, *et al.*, Cohomological dimension of certain algebraic varieties. Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), no. 12, 3537–3544. Le cas général est dû à Jouanolou (non publié). Ces résultats sont pour la cohomologie à support dans un idéal de type fini arbitraire, il est fort possible que, dans le cas de B_+, ils figurent quelque part.

Th. 4. Si $(A, \mathfrak{m}, k)$ est local Noethérien et M est de type fini, notons $d := \dim M \otimes_A k$. Alors $d = \mathrm{cd}_{B_+}(M)$ et l'application naturelle

$$H^d_{B_+}(M) \otimes_A k \to H^d_{B_+}(M \otimes_A k)$$

est un isomorphisme gradué.

Preuve. Soit $F_\bullet$ une résolution libre de k comme A-module. Le complexe $\mathcal{C}^\bullet_X M \otimes_A F_\bullet$ donne lieu à deux suites spectrales de second termes respectifs

$$'_2E^p_q = H^p_{S_+}(\mathrm{Tor}^R_q(M, k))$$

and

$$''_2E^p_q = \mathrm{Tor}^R_q(H^p_{S_+}(M), k)$$

D'après les lemmes 3 et 4, $'_2E^p_q = 0$ pour $p > d$. D'autre part $'_2E^d_0 \neq 0$ car $\dim M \otimes_A k = d$. Il s'ensuit que $'_\infty E^d_0 = {}'_2E^d_0 \neq 0$. D'autre part, par définition, $''_2E^p_q = 0$ pour $p > e := \mathrm{cd}_{B_+}(M)$ et $''_2E^e_0 \neq 0$ car $H^p_{S_+}(M)_\mu$ est de type fini pour tout μ. Il s'ensuit que $''_\infty E^e_0 = {}''_2E^e_0 \neq 0$. D'où $e = d$ et l'isomorphisme annoncé.

Cette preuve fonctionne si A est cohérent et M de $(n-d)$-présentation finie.

Corollaire. Si A est localement Noethérien et M de type fini, $\mathrm{cd}_{B_+}(M)$ est le maximum des dimensions des fibres $M \otimes_A k$, pour $A \to k$ homomorphisme dans un coprs k (on peut se restreindre à $k = A/\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$ maximal).

Th 5. Soit I un B-ideal homogène. Si $X := \mathrm{Proj}(B/I) \to \mathrm{Spec}(A)$ a une fibre de dimension $d \geq 0$, alors $H^d(X, \mathcal{O}_X(\mu)) \neq 0$ pour tout $\mu < -d$.

On en déduit que le max des dimensions des fibres (donc la dimension cohomologique) est le max des d tels que $H^d(X, \mathcal{O}_X(-d-1)) \neq 0$.

Preuve. On se localise au point ayant cette fibre. Par le Th. 4, il suffit alors de montrer que ce résultat est vrai lorsque A est un corps. On peut supposer $d \geq 1$ (le cas $d = 0$ étant facile, et pas vraiment ce que l'on souhaite...) et il suffit de montrer le résultat pour $\mu = -d-1$, car $H^{d+1}_{B_+}(B/I)_{-\mu} \simeq (\omega_{B/I})_\mu$, et $\omega_{B/I}$ est S_2 de dimension $d+1$, donc de profondeur > 0.

Pour cela, on se réduit en caractéristique p –par exemple pour $\omega_{B/I}$, qui est de type fini– et on montre que si $(x_0, \ldots, x_d)$ est un système de paramètres, la classe de $\frac{1}{x_0 \cdots x_d}$ dans $H^{d+1}_{\mathfrak{m}}(B/I)$ est non nulle. Cela signifie que $(x_0 \cdots x_d)^t \notin (x_0^{t+1}, \ldots, x_d^{t+1})$ pour tout t. En effet, si cela n'était pas le cas, en applicant le Frobenius on aurait $(x_0 \cdots x_d)^{p^e t} \in (x_0^{p^e(t+1)}, \ldots, x_d^{p^e(t+1)})$, donc $\frac{1}{(x_0 \cdots x_d)^{p^e}}$ serait nul dans $H^{d+1}_{\mathfrak{m}}(B/I)$ pour tout e. Mais ces éléments engendrent ce module, qui est non nul.

Th. 6. Soit M un B-module gradué et N un A-module. Alors,

$$H^i_{B_+}(M \otimes_A N) \simeq H_{n-i}(H^n_{B_+}(L^{M/B}_\bullet) \otimes_A N)$$

pour tout $i \geq \max_{j\geq 1}(\mathrm{cd}_{B_+}(\mathrm{Tor}_j^A(M,N)) - j + 1)$.

Preuve. Les suites spectrales associées à $L_\bullet \otimes_A N$ montrent ceci car $\mathrm{cd}_{B_+}\mathrm{Tor}_j^A(M,N)) \leq i + j - 1$ pour $j \geq 1$.

Si k est un corps, on note que $\mathrm{Tor}_j^A(M,k)$ est un $k[X_1,\ldots,X_n]$ module gradué, qui est de type fini si M est de j-présentation finie.

Au moins si A est Noethérien, $\dim \mathrm{Tor}_j^A(M,k) \leq \dim \mathrm{Tor}_1^A(M,k)$ pour $j \geq 1$, et si $(A,\mathfrak{m},k)$ est de plus local $\mathrm{Supp}\mathrm{Tor}_j^A(M,N) \subseteq \mathrm{Supp}\mathrm{Tor}_1^A(M,k)$ pour tout A-module N et tout $j \geq 1$.

Cela découle du critère local de platitude, voir par exemple D. Eisenbud, Commutative Algebra ... (GTM 150), Theorem 6.8.

Corollaire. Si A est localement Noethérien et M de type fini, pour tout homomorphisme $\psi : A \to k$ de A dans un corps,

$$H^i_{B_+}(M \otimes_A k) \simeq H_{n-i}(H^n_{B_+}(L_\bullet^{M/B}) \otimes_A k)$$

pour tout $i \geq \dim(\mathrm{Tor}_1^A(M,k))$.

En particulier, la dimension de $H^i(X, \mathcal{F} \otimes k)$ est semi-continue supérieurement pour tout $i \geq \max_{A\to k}\{\dim(\mathrm{Tor}_1^A(M,k))\} - 1$.

Plus précisément, si $i \geq \dim(\mathrm{Tor}_1^A(M,k)) - 1$, avec $k = A/\mathfrak{m}$, le complexe

$$H^n_{B_+}(L_{n-i})_0 \to H^n_{B_+}(L_{n-i-1})_0 \to H^n_{B_+}(L_{n-i-2})_0$$

est un complexe de A-modules libres de type fini dont l'homologie au milieu est $H^{i+1}_{B_+}(M)_0 = H^i(\mathbf{P}^n_k, \mathcal{F} \otimes k)$. Les idéaux de mineurs des deux matrices déterminent la dimension sur k de $H^{i+1}_{B_+}(M \otimes_A k)_0$. Cette dimension est constante sur une composante connexe si et seulement si ces idéaux de mineurs sont tous de radical nul ou égal à A. Le module $H^{i+1}_{B_+}(M)_0$ est localement libre si et seulement si sur chaque composante connexe ces idéaux sont soit 0 soit A. Si A est réduit, ces deux conditions sont les mêmes (mais pas sinon).

Th. 7. Soit M un B-module gradué de type fini. Si A est Noethérien et réduit, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout $\mathfrak{m}$ maximal dans $\mathrm{Spec}(A)$, $\dim \mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{m}) \leq p$,

(ii) au dessus d'une composante connexe de $\mathrm{Spec}(A)$ les polynômes de Hilbert de deux fibres diffèrent au plus par un polynôme de degré $< p$.

Si ces conditions sont vérifiées,

$$H^i_{B_+}(M \otimes_A N) \simeq H_{n-i}(H^n_{B_+}(L_\bullet^{M/B}) \otimes_A N)$$

pour tout $i \geq p$ et tout A-module N.

Th. 8. Si A est un corps et M un module gradué nul en degrés négatifs, engendré par m éléments et ayant un module de relations engendré en degré au plus d, alors

$$\mathrm{reg}(M) \leq (md)^{2^{n-2}} \text{ (si } n \geq 2),$$

sauf si M a des facteurs direct $B(-a_i)$ pour $i \in I$, auquel cas

$$\operatorname{reg}(M) \leq \max\{(md)^{2^{n-2}}, \max_{i \in I}\{a_i\}\}.$$

En fait l'exposant 2^{n-2} peut être essentiellement remplacé par 2^{d-1} ou d est la dimension du support de $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ dans $\mathbf{P}^n$, et même dans le cas où $M = B/I$ par $2^{\delta-1}$ où δ est la dimension du lieu singulier de $X := \operatorname{Proj}(B/I)$ (les bornes sont plus compliquées à écrire, le terme essentiel de l'exposant est celui que je donne).

Lemme 5. Si $(A, \mathfrak{m}, k)$ est un anneau local et M un module de présentation finie, on a équivalence entre

(i) M est plat,
(ii) M est libre,
(iii) M est projectif,
(iv) $\operatorname{Tor}_1^A(M, k) = 0$.
Une de ces propositions + la constance du rang r est équivalente à
(v) $\operatorname{Fitt}_A^i(M) = 0$ pour $i < r$ et $\operatorname{Fitt}_A^r(M) = A$.

Si $A^p \to A^q \to M \to 0$ est une présentation $\operatorname{Fitt}_A^i(M)$ est l'idéal des mineurs de taille $q - i$ de la matrice $p \times q$ correspondante $(\det \emptyset = 1)$.

Comme (i) et (iii) sont des propriétés locales on peut donner un corollaire global.

On notera que les idéaux de Fitting sont invaraints par changement de base arbitraire.