Grassmanniennes

Mathieu Florence

1 - Construction

k corps, $V =$ ~~un~~ k-EV (e.g. k^n) avec une base $e_1, \dots, e_n$.

But = paramétrer les quotients de V, de dim $n-r$.

Soit $\pi : V \to E$ un quotient. Alors $\exists\, I \subset \{1, \dots, n\}$, $\# I = n-r$

tel que $\pi|_{k^I}$ soit un iso. $\quad (k^I = \bigoplus_{i \in I} k \cdot e_i)$.

Alors $\pi' := \pi_{|k^I}^{-1} \circ \pi : k^n \to k^I$ vérifie $\pi'|_{k^I} = id$.

la matrice de π', de taille $(n-r, n)$, possède un mineur :

celui corresp à I, qui est la matrice Id.

On obtient une bij entre $\left\{ \begin{array}{c} \text{quotients} \\ \pi : V \to E \\ \text{tq } \pi|_{k^I} \text{ est isom} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \{\text{ces matrices}\}$

Soit $I \subset \{1, \dots, n\}$, $\# I = n-r$.

Soit $k[X^I] = k[x^I_{p,q},\ {}^{p = 1 \dots n-r}_{q = 1 \dots n,\, q \notin I}]$

Pour $J \subset \{1, \dots, n\}$, $\# J = n-r$, on pose $P^I_J = \det X^I_J$

$\uparrow$ J-ème mineur de la mat X^I

Pour recoller les schémas affines corresp à chaque I,

on considère pour I, J :

$$\theta_{I,J} : k[X^J, (P^J_I)^{-1}] \to k[X^I, (P^I_J)^{-1}]$$
$$X^J \mapsto (X^I_J)^{-1} X^I$$

On a : $\theta_{I,J}(X^J_I) = (X^I_J)^{-1}$

En particulier $\theta_{I,J}(P^J_I) = (P^I_J)^{-1}$ ce qui mq $\underline{\theta_{I,J} \text{ isom}}$.

On vérifie facilement que $\left\{ \begin{array}{l} \theta_{I,K} = \theta_{I,J} \circ \theta_{J,K} \\ \theta_{I,I} = id \end{array} \right.$

On recolle les $\mathrm{Spec}\, k[x^I]$ à l'aide des isom $\theta_{I,J}$
On obtient une var lisse de dim $r(n-r)$
On l'appelle la grassmannienne $\mathrm{Grass}(n,r)$
(qui param les SEV de V de dim r)
Par ex. $\mathrm{Grass}(n,1) = \mathbb{P}^{n-1}$

Prop si X est un k-schéma, on a
$$\mathrm{Hom}_{k\text{-sch}}(X, \mathrm{Gr}(n,r)) = \{\text{quotients de } \mathcal{O}_X^n, \text{ ll rg } n-r\}$$

Dém (idée) soit $\pi : \mathcal{O}_X^n \to Q \to 0$ un quotient
on peut recouvrir X par des ouverts affines $\mathrm{Spec}(A)$
tels que $*)$ $Q \simeq A^{n-r}$ au-dessus de $\mathrm{Spec}(A)$
$**)$ $\exists I \subset \{1,\dots,n\}$, $\# I = n-r$, $\pi_{|A^I}$ iso.
Sur un tel affine, $\pi_{|\mathrm{Spec} A}$ est donné par une matrice indicée par $I \times I^c$ i.e. par un morphisme

$$\begin{array}{c} \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow \mathrm{Grass}_I, \\ \quad\quad\quad\quad\quad \big\downarrow \text{io} \\ \quad\quad\quad\quad\quad \mathrm{Grass} \end{array}$$
l'ouvert de la Grassmannienne correspondant à I.

Ces trucs se recollent en un morphisme $X \to \mathrm{Gr}(n,r)$
Réciproquement, c'est à peu près la m chose ∎

2. Plongement de Plücker

V un k-EV, dim n.
Prop : on a une injection
$$P_r : \mathrm{Grass}(V,r)(k) \longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^r V)(k)$$
$$E \longmapsto \Lambda^r E$$
{ss-fibré de V
{ss-EV

dém OK. ∎

Si $s \leq r$, on a un accouplement

$$\Lambda^s V^* \otimes \Lambda^r V \longrightarrow \Lambda^{r-s} V$$

Pour $s=1$ c'est donné comme suit :

$$V^* \otimes \Lambda^r V \longrightarrow \Lambda^{r-1} V$$

(✱)

$$\varphi \otimes v_0 \wedge \dots \wedge v_{r-1} \longmapsto \sum_i (-1)^i \varphi(v_i)\, v_0 \wedge \dots \wedge \hat{v}_i \wedge \dots \wedge v_{r-1}$$

Si $x \in \Lambda^r E \subset \Lambda^r V$, $\dim E = r$, la formule (✱) ci-dessus itérée mq $\forall \varphi \in \Lambda^{r-1} V^*$, $\langle \varphi, x \rangle \in E$

l'accouplement ci-dessus, aussi noté $\varphi(x)$

Comme $\Lambda^{r+1} E = 0$, on trouve alors $\boxed{\begin{array}{c} x \wedge \varphi(x) = 0 \\ \forall \varphi \in \Lambda^{r-1} V^* \end{array}}$

Ce sont les <u>équations de Plücker</u>

On voudrait vérifier que ce sont bien les éq. de l'image du plongement de Plücker ci-dessus.

<u>Lm 1</u> Soit $x \in \Lambda^r V$, $E \subset V$ de dim $d \geq 0$

Alors $x \wedge e = 0$, $\forall e \in E \iff x$ est divisible par $\Lambda^d E$

<u>dém</u> : réc sur d ; le cas $d=1$ est crucial (mais facile) ∎

<u>Lm 2</u> Soit $x \in \Lambda^r V$.

Alors $\mathrm{Im}\left(\begin{array}{c} \Lambda^{r-1} V^* \to V \\ \varphi \mapsto \varphi(x) \end{array}\right)$ est le plus petit SEV E de V tel que $x \in \Lambda^r E$.

<u>Rq</u> on sait que $\dim E \geq r$, et x est puiss. r^e pure (= décomposable) ssi $\dim E = r$.

<u>dém</u> cadeau ∎

Montrons ~~lascpas~~ que si x vérifie $x \wedge \varphi(x) = 0$ $\forall \varphi$ alors il est décomposable, i.e. dans l'image du plongement de Plücker.

On peut supp $x \neq 0$.

$x \in \Lambda^r V$ tq. $x \wedge \varphi(x) = 0$, $\forall \varphi \in \Lambda^{r-1} V^*$.

Soit $E = \mathrm{Im}\,(\Lambda^{r-1} V^* \longrightarrow V)$

On a $\dim E \geq r$ par le lm 2.

Si $\dim E > r$ alors $\det E \mid x$ par le lm 1, imp.

Donc $\dim E = r$ donc $k.x = \Lambda^r E$ par le lm 1. ∎

Bien sûr, le plongement de Plücker défini ci-dessus sur les k-pts est un morphisme de schémas, défini pareil : à un ss-fibré E on associe $\Lambda^r E$.

Soit $Gr'(V,r)$ le ss-schéma fermé de $\mathbb{P}(\Lambda^r V)$ définie par les éq. de Plücker. On a donc un morphisme :

$$Gr(V,r) \to Gr'(V,r)$$

qui est bijectif et une i.F.

Montrons que Gr' est lisse : soit $x \in Gr'(V,r)(k)$, on peut supp $\bar{k} = k$.

Alors $kx = \Lambda^r E$, $\dim E = r$, par ce qui précède.

On va calculer $T_x Gr'(V,r)$.

Soit $t \in Gr'(k[\varepsilon])$ se réduisant en x mod ε.

Soit F un suppl. de E ds V :

$$\Lambda^r V = \Lambda^r E \oplus (\Lambda^{r-1} E \otimes F \oplus \dots \oplus \Lambda^r F)$$

$$\check{t} = \check{x} + \varepsilon\,(y_{r-1} + \dots + y_0)$$

l'indice est la Λ. de E.

On va mq $y_i = 0$ si $i \leq r-2$.

On a : $t \wedge \varphi(t) = 0 \quad \forall \varphi \in \Lambda^{r-1} V^* \qquad (\star)$

(car t est un point de Gr')

Testons cela sur un elt φ qui s'annule sur F

ie $\varphi \in \Lambda^{r-1} F^{\perp}$

Par ex. $\varphi = e_r^*$, une fois choisie une base e_i de E

On trouve, partant de $(*)$:

$(y_{r-1} + \dots + y_0) \wedge e_r = x \wedge f_r$

où $y_{r-1} = e_1 \wedge \dots \wedge e_{r-1} \wedge f_r + \dots$

On obtient $y_i \wedge e_i = 0$ si $i \leq r-2$. Ceci vaut aussi pour n'importe quel $e \in E$ à la place de e_i.

On trouve $y_i = 0$.

Finalement $t = x + \varepsilon y_{r-1}$, $y_{r-1} \in \Lambda^{r-1} E \otimes F$

de dim $r(n-r)$

C'est la bonne dimension, cqfd ∎

Pour terminer, un fait :

$Gr(4,2) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 k^4)$ est le diviseur d'équation

dim 4 — dim 5

$x \wedge x = 0$.

6 oct 2011.

Grassmanniennes, suite M. Florence

2.

2.1 Polynôme de Hilbert

<u>Déf</u> $P(z) \in \mathbb{Q}[z]$ est dit <u>numérique</u> ssi $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$

<u>Prop 1</u> a) P est numérique ssi $\exists c_i' \in \mathbb{Z}$, $P(z) = c_r'\binom{z}{r} + \dots + c_1'\binom{z}{1} + c_0'$

ssi $\exists c_i \in \mathbb{Z}$, $P(z) = c_r\binom{z+r}{r} + \dots + c_1\binom{z+1}{1} + c_0$

ssi $P(z) \in \mathbb{Z}$, $\forall z >> 0$.

b) si $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est t.q. $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ est un poly. num. alors f aussi.

dém : ▨

<u>Prop 2</u> Soit X/k var proj., $\mathcal{O}_X(1)$ faisceau très ample sur X, $\mathcal{F}$ fsc coh sur X. On pose $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(1)^{\otimes n}$

Soit $\chi(\mathcal{F}) = \sum_0^\infty (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{F})$

Alors $n \mapsto \chi(\mathcal{F}(n))$ est un polynôme numérique

<u>dém</u> χ est additive sur les SE courtes

Opo k infini. Récurrence sur dim Supp $\mathcal{F}$

on choisit un hyperplan $H \subset \mathbb{P}^n$ (le $\mathbb{P}^n$ ambient) qui ne contient aucune comp. irréd de Supp$(\mathcal{F})$.

Soit h une éq. de H. On a la SE

$$0 \to R \to F(-1) \xrightarrow{h} F \to Q \to 0.$$

En dehors de H, $F(-1) \to F$ est iso donc $R = Q = 0$

En dehors de supp F, $F(-1) = F = 0$ donc $R = Q = 0$.

Ainsi R et Q sont à support dans Supp $\mathcal{F} \cap H$ qui est de dim plus petite.

Après twist, on a $\chi(R(n)) - \chi(F(n-1)) + \chi(F(n)) - \chi(Q(n)) = 0$

donc $\Delta\chi(n-1) = \chi(R(n)) - \chi(Q(n))$ numérique (hyp de réc.)

donc $\chi(n)$ aussi (Prop 1) ▨

Cor : Pour $n \gg 0$, $\dim_k H^0(X, F(n))$ est un poly. num.

Prop 3 Sous les hyp. précédentes, si X est fini sur k alors $\chi(F(n)) = \dim_k H^0(X, F) = \operatorname{rang} F = \dim_k \tilde{M}$ où $F = \tilde{M}$.

Prop 4 SLHP, (Prop 2) $\chi(\mathcal{O}_X(n)) = d \frac{n^r}{r!} + \text{t. deg} < r$

où $r = \dim(X)$

$d = \text{degré}(X) = \# \{ X \cap L,\ L \subset \mathbb{P}^n \text{ linéaire},\ \underset{\dim X = \operatorname{codim} L}{} \}$

dém ops k infini. Soit H hyperplan tq $\underset{``\{h=0\}}{}$

$$0 \to \mathcal{O}_X(-1) \xrightarrow{\times h} \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X\cap H} \to 0 \quad \text{est exacte.}$$

C'est le cas dès que H ne contient aucun point associé à $\mathcal{O}_X$. (Cf Associated points and applications)
Brian Osserman

On note maintenant que $\dim X \cap H = \dim X - 1$.
La SE donne alors

$$\chi(\mathcal{O}_{X\cap H}(n)) = \chi(\mathcal{O}_X(n)) - \chi(\mathcal{O}_X(n-1))$$
$$= d \frac{n^{r-1}}{(r-1)!} + \deg < r-1$$

où ~~$\chi(\mathcal{O}_X(n))$~~ $\frac{d}{r!}$ est le coef dom. de $\chi(\mathcal{O}_X(n))$.

Après avoir coupé par $\dim X$ hyperplans, on arrive à un $X \cap H$ de dim 0 et de degré d, cqfd ☒

Prop 5 Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ un ss-schéma fermé de poly. de Hilbert égal à $\binom{n+r}{r}$. Alors X est linéaire.

dém ops k alg clos.
(Rem : X linéaire ssi $X \to \operatorname{Proj}\left(\frac{k[X_0, \dots, X_n]}{\text{formes linéaires nulles sur } X}\right)$ est iso)

On note que $P = \binom{n+r}{r} \Rightarrow \deg X = 1$.

Soit $I \subset k[X_0, \dots, X_n]$ l'idéal homogène (saturé) déf. X.
$J = \sqrt{I}$ définit $X_{réd}$.
Notons $r = \dim(X)$, notons $X_{réd} = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_s$

irréd de dim r car $\deg(X) = 1$

dim $< r$

Si X_1 est linéaire, alors je dis que $X_2 = \dots = X_s = \emptyset$

$$\binom{n+r}{r} = H(X, n) \geq H(X_{réd}, n)$$
$$\geq H(X_1, n) = \binom{n+r}{r}$$

ce qui implique $X = X_1$, étant donné que $X_1 \subset X$.
(On a noté $H(X, -)$ les poly. de Hilbert).
Reste à montrer la prop si X est intègre. En fait on va mq « $X \subset \mathbb{P}^n$ intègre, de d° 1 est linéaire ».
ISM $\forall x, y \in X(k)$, la droite qui les joint est $\subset X$.
L'idée est alors d'intersecter ....