Construction du schéma de Hilbert

Matthieu Romagny, 8 décembre 2011

Plan de l'exposé : 1. Représentabilité de $\mathrm{Quot}^P(\mathscr{E})$, 2. Projectivité de $\mathrm{Quot}^P(\mathscr{E})$, 3. Application aux foncteurs Hom, Isom et Aut.

On fixe : un schéma noethérien S ; un S-schéma projectif X muni d'un faisceau relativement très ample $\mathscr{O}_X(1)$; un $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{E}$, plat sur S ; un polynôme P *numérique* i.e. à coefficients rationnels et à valeurs entières.

Pour un $\mathscr{O}_X$-module cohérent S-plat $\mathscr{F}$, nous dirons que $\mathscr{F}$ *a pour polynôme de Hilbert* P si toutes les fibres $\mathscr{F}_s$ ont pour polynôme de Hilbert P, bien sûr défini à l'aide du faisceau $k(s)$-ample $\mathscr{O}_{X_s}(1)$. Nous nous intéressons au foncteur $\underline{\mathrm{Quot}}^P(\mathscr{E}/X/S)$ des classes d'équivalence de quotients de $\mathscr{E}$, plats et de présentation finie sur S, de polynôme de Hilbert P. Pour simplifier nous le notons $\mathrm{Quot}^P(\mathscr{E})$, abandonnant la notation soulignée.

1 Représentabilité de $\mathrm{Quot}^P(\mathscr{E})$

Nous allons d'abord montrer, en plusieurs étapes, que ce foncteur est représentable par un S-schéma quasi-projectif.

1.1. Torsion uniforme des faisceaux. D'après le théorème de Mumford sur la régularité de Castelnuovo-Mumford (exposé de C. Demarche) et le théorème de changement de base dans la cohomologie (exposés de F. Martin et A. Rodriguez), il existe un entier m tel que pour tout $r \geqslant m$, le faisceau $\mathscr{E}$ ainsi que tous ses quotients de polynôme de Hilbert P et tous ses sous-faisceaux de polynôme de Hilbert $P_{\mathscr{E}} - P$ ont leur m-twist engendré par ses sections globales, à images directes supérieures nulles, et à image directe localement libre de formation compatible au changement de base. Dans la suite, on fixe un tel r.

1.2. Introduction d'une grassmannienne $\mathrm{Grass}^{P(r)}(\mathscr{E}')$. Dans la suite, on note $\pi : X \to S$ le morphisme de structure et pour des changements de base variables $T \to S$ on note $\pi_T : X_T \to T$ le morphisme déduit. On note $\mathscr{E}' = \pi_*\mathscr{E}(r)$ qui désigne, sans ambiguïté possible, le faisceau $\pi_*(\mathscr{E}(r))$. Il découle du choix de r que la formation de cette image directe commute au changement de base, i.e.

$$\mathscr{E}'_T = (\pi_*\mathscr{E}(r))_T = \pi_{T*}\mathscr{E}_T(r).$$

Considérons le foncteur $\mathrm{Grass}^{P(r)}(\mathscr{E}')$ qui associe à $T \to S$ l'ensemble des sous-$\mathscr{O}_T$-modules $\mathscr{G}' \subset \mathscr{E}'_T$ tels que le quotient associé est localement libre de rang $P(r)$, ou de manière équivalente l'ensemble des classes d'équivalence de surjections de $\mathscr{O}_T$-modules $\mathscr{E}'_T \twoheadrightarrow \mathscr{F}'$ de but localement libre de rang $P(r)$. Pour chaque objet comme ci-dessus, en utilisant l'adjonction (π_T^*, π_{T*}) puis en tordant $-r$ fois on déduit de $\mathscr{G}' \to \mathscr{E}'_T = \pi_{T*}\mathscr{E}_T(r)$ un morphisme de $\mathscr{O}_{X_T}$-modules que nous noterons $h : \pi_T^*\mathscr{G}'(-r) \to \mathscr{E}_T$ où $\pi_T^*\mathscr{G}'(-r)$ désigne, sans ambiguïté possible, le faisceau $(\pi_T^*\mathscr{G}')(-r)$. Ce morphisme jouera un rôle crucial dans la suite. Enfin, rappelons que le foncteur $\mathrm{Grass}^{P(r)}(\mathscr{E}')$ est représentable par un S-schéma projectif lisse.

1.3. Construction d'un morphisme vers $\mathrm{Grass}^{P(r)}(\mathscr{E}')$**.** Soient $\mathscr{E}_T \twoheadrightarrow \mathscr{F}$ un quotient de $\mathscr{E}_T$, plat sur T, de polynôme de Hilbert P, et $\mathscr{G} = \ker(\mathscr{E}_T \to \mathscr{F})$. Utilisant le fait que $R^1\pi_{T*}\mathscr{G}(r) = 0$ on trouve une suite exacte :

$$(\triangle) \qquad 0 \longrightarrow \pi_{T*}\mathscr{G}(r) \longrightarrow \pi_{T*}\mathscr{E}_T(r) \longrightarrow \pi_{T*}\mathscr{F}(r) \longrightarrow 0.$$

On obtient donc un morphisme de foncteurs :

$$\alpha_r : \mathrm{Quot}^P(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathrm{Grass}^{P(r)}(\mathscr{E}')$$

qui envoie (la classe de) $\nu : \mathscr{E}_T \twoheadrightarrow \mathscr{F}$ sur (la classe de) $\pi_{T*}\nu(r) : \mathscr{E}'_T = \pi_{T*}\mathscr{E}_T(r) \twoheadrightarrow \pi_{T*}\mathscr{F}(r)$. De manière plus complète α_r envoie $\mathscr{G} \to \mathscr{E}_T \to \mathscr{F}$ sur $\mathscr{G}' \to \mathscr{E}'_T \to \mathscr{F}'$ où $\mathscr{F}' = \pi_{T*}\mathscr{F}(r)$ et $\mathscr{G}' = \pi_{T*}\mathscr{G}(r)$.

1.4. Factorisation de α_r par une strate aplatissante. Comme $\pi_{T*}\mathscr{F}(r)$ est plat, on a

$$L^1\pi_T^*(\pi_{T*}\mathscr{F}(r)) = \mathscr{T}or_1^{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_T, \pi_{T*}\mathscr{F}(r)) = 0$$

de sorte que la suite $\pi_T^*(\triangle)$ est exacte. Elle s'insère dans un diagramme commutatif à lignes exactes et à flèches verticales surjectives :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_T^*\pi_{T*}\mathscr{G}(r) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_T^*\pi_{T*}\mathscr{E}_T(r) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_T^*\pi_{T*}\mathscr{F}(r) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{G}(r) \arrow[r] & \mathscr{E}_T(r) \arrow[r] & \mathscr{F}(r) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

On en extrait une suite exacte $\pi_T^*\pi_{T*}\mathscr{G}(r) \to \mathscr{E}_T(r) \to \mathscr{F}(r) \to 0$ puis en tordant $-r$ fois :

$$(\pi_T^*\pi_{T*}\mathscr{G}(r))(-r) \to \mathscr{E}_T \to \mathscr{F} \to 0.$$

Puisque $\mathscr{G}' = \pi_{T*}\mathscr{G}(r)$, on retrouve $h : \pi_T^*\mathscr{G}'(-r) \to \mathscr{E}_T$ et cette suite exacte montre que $\mathscr{F}$ est isomorphe au conoyau de h. En particulier, le conoyau de h est plat de polynôme de Hilbert P. Or sur la grassmannienne $G = \mathrm{Grass}^{P(r)}(\mathscr{E}')$, on dispose d'un objet universel $\mathscr{G}'_u \to \mathscr{E}'_G \to \mathscr{F}'_u$, du morphisme de $\mathscr{O}_{X_G}$-modules $h_u : \pi_G^*\mathscr{G}'_u(-r) \to \mathscr{E}_G$ associé comme dans 1.2, et du conoyau $\mathscr{C} := \mathrm{coker}(h_u)$ qui n'a pas de raison d'être G-plat. Ce qui précède montre que α_r se factorise par $\Sigma^P(\mathscr{C})$, la strate d'indice P de la stratification aplatissante de $\mathscr{C}$, qui est une somme disjointe de sous-schémas de G d'après l'exposé sur les stratifications aplatissantes (on verra plus loin que c'est en fait un sous-schéma de G, mais on ne peut pas l'affirmer pour l'instant). En résumé, nous avons montré qu'on a des morphismes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Quot}^P(\mathscr{E}) \arrow[r, shift right, "\alpha_r"'] & \Sigma^P(\mathscr{C}) \arrow[l, shift right, "\beta_r"']
\end{tikzcd}$$

où β_r envoie un objet $\mathscr{G}' \to \mathscr{E}'_T \to \mathscr{F}'$ avec $\mathrm{coker}(h)$ plat de polynôme de Hilbert P sur la surjection induite $\mathscr{E}_T \to \mathscr{F} := \mathrm{coker}(h)$. De plus, nous avons montré que $\beta_r \circ \alpha_r = \mathrm{id}$.

1.5. Isomorphisme avec la strate aplatissante. Montrons maintenant que $\alpha_r \circ \beta_r = \mathrm{id}$; ce n'est pas tout à fait trivial, et il me semble que ce n'est pas fait dans l'article de Nitsure. Sur un schéma $T \to S$, partons d'un objet $\mathscr{G}' \to \mathscr{E}'_T \to \mathscr{F}'$ avec $\mathrm{coker}(h)$ plat sur T et de polynôme de Hilbert P. Cet objet est envoyé par β_r sur $\mathscr{F} := \mathrm{coker}(h)$ puis par α_r sur $\pi_{T*}\mathscr{F}(r)$. Nous voulons montrer que $\pi_{T*}\mathscr{F}(r) \simeq \mathscr{F}'$ comme quotients de $\mathscr{E}'_T$. On dispose d'un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_T^*\mathscr{G}' \arrow[r] \arrow[d] & \pi_T^*\mathscr{E}'_T \arrow[r] \arrow[d] & \pi_T^*\mathscr{F}' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{G}(r) \arrow[r] & \mathscr{E}_T(r) \arrow[r] & \mathscr{F}(r) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $\mathscr{G}$ est défini comme noyau de $\mathscr{E}_T \to \mathscr{F}$ ce qui induit le morphisme surjectif u, et v est le morphisme surjectif venant du fait que $\mathscr{E}_T(r)$ est engendré par ses sections. En utilisant l'adjonction (π_T^*, π_{T*}) pour les trois flèches verticales, on obtient le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{G}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{E}'_T \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{F}' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \pi_{T*}\mathscr{G}(r) \arrow[r] & \pi_{T*}\mathscr{E}_T(r) \arrow[r] & \pi_{T*}\mathscr{F}(r) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

La flèche verticale $\mathscr{E}'_T \to \pi_{T*}\mathscr{E}_T(r) = \mathscr{E}'_T$ est l'identité. Il en découle que la flèche $\mathscr{F}' \to \pi_{T*}\mathscr{F}(r)$ est surjective, entre deux modules localement libres de même rang, donc un isomorphisme, comme on le voulait.

1.6. Conclusion. Finalement α_r et β_r induisent un isomorphisme entre $\mathrm{Quot}^P(\mathscr{E})$ et $\Sigma^P(\mathscr{C})$, qui est une somme disjointe finie de sous-schémas du schéma projectif G, donc un S-schéma quasi-projectif, en particulier séparé et de type fini.

2 Projectivité de $\mathrm{Quot}^P(\mathscr{E})$

Comme $\mathrm{Quot}^P(\mathscr{E})$ est quasi-projectif, pour montrer qu'il est projectif il suffit de montrer qu'il est propre et pour cela il suffit de vérifier le critère valuatif de propreté. Soit R un anneau de valuation discrète de corps de fractions K, et plaçons-nous sur la base $S = \mathrm{Spec}(R)$. Étant donné une (classe de) surjection $\mathscr{E}_K \to \mathscr{F}_K$, on doit montrer que le $\mathscr{O}_{X_K}$-module $\mathscr{F}_K$ s'étend en un $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{F}$ quotient de $\mathscr{E}$ plat sur S. La réponse est donnée par le procédé d'*adhérence schématique* décrit dans EGAIV$_2$, paragraphe 2.8 (lire notamment le lemme 2.8.1.1). Faisons-le directement. Sur un ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de X, le faisceau $\mathscr{E}$ est donné par un R-module M, et on dispose d'un K-module quotient $M_K \to N_K$ et on veut compléter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P_K \arrow[r] & M_K \arrow[r] & N_K \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r, dotted] & P \arrow[r, dotted] \arrow[u, hook, dotted] & M \arrow[r, dotted] \arrow[u, hook] & N \arrow[r, dotted] \arrow[u, hook, dotted] & 0. \end{tikzcd}$$

Comme la platitude sur R est simplement l'absence de torsion, s'il existe un R-module plat N qui s'insère dans ce diagramme, alors on voit facilement que $P = \ker(M \to N)$ doit être égal à $P_K \cap M$. Réciproquement, si l'on pose $P = P_K \cap M$ alors $N = M/P$ répond à la question. Les $\mathscr{O}_U$-faisceaux $\mathscr{F}_U$ associés aux modules $N = M/P$ sur des ouverts qui recouvrent X se recollent en un faisceau $\mathscr{F}$ qui est le faisceau recherché.

3 Application à Hom, Isom et Aut

Nous indiquons quelques schémas intéressants construits à partir du schéma de Hilbert. Les preuves sont un peu moins détaillées que précédemment.

3.1 Un lemme

Lemme. *Soit $u : Z \to X$ un S-morphisme entre deux schémas propres, plats, de présentation finie sur S. Soit F le foncteur sur les S-schémas définit par*

$$F(T) = \begin{cases} \{\varnothing\} & \textit{si } u_T : Z_T \to X_T \textit{ est un isomorphisme,} \\ \varnothing & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Alors F est représentable par un sous-schéma ouvert de S.

Montrons ce lemme. Notons $R \subset Z$ le fermé complémentaire de l'ouvert où π est étale, et R^* son image dans S, qui est fermée puisque $Z \to S$ est propre. À cause du critère de platitude par fibres (EGAIV$_3$, th. 11.3.10), $u_T : Z_T \to X_T$ est étale si et seulement si $u_t : Z_t \to X_t$ est étale pour tout $t \in T$. Ainsi, u_T est étale ssi $T \to S$ se factorise par l'ouvert $S \smallsetminus R^*$. Quitte à remplacer S par cet ouvert, on peut donc supposer u étale. Comme Z est propre u est alors fini, donc u est un isomorphisme ssi le faisceau $u_* \mathscr{O}_Z$, qui est localement libre, est de rang 1. Soit L le fermé de X où ceci n'est pas le cas et L^* son image dans S, qui est fermée. Alors F est représenté par l'ouvert $S \smallsetminus L^*$.

3.2 Schéma Hom

Soit S un schéma et X, Y deux S-schémas. On note $\mathrm{Hom}_S(X, Y)$ le foncteur qui associe à un S-schéma T l'ensemble des T-morphismes $f : X_T \to Y_T$.

Proposition. *Supposons $X \to S$ projectif et plat et $Y \to S$ quasi-projectif. Alors le foncteur $\mathrm{Hom}_S(X, Y)$ est représentable par un ouvert de $\mathrm{Hilb}_S(X \times_S Y)$.*

En effet, pour un tel f, le *graphe* Γ_f défini comme l'égalisateur des deux morphismes

$$f \circ \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_1 : X \times_S Y \to X,$$

ou encore comme la préimage de la diagonale de Y par le morphisme

$$(f \circ \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_1) : X \times_S Y \to Y \times_S Y,$$

est un sous-schéma fermé de $X \times_S Y$ par l'hypothèse de séparation sur Y, dont la formation commute au changement de base. On définit ainsi un monomorphisme de foncteurs

$$\mathrm{Hom}_S(X, Y) \to \mathrm{Hilb}_S(X \times_S Y).$$

Par ailleurs, étant donné un T-point du schéma de Hilbert, i.e. un sous-schéma fermé $Z \subset X_T \times_T Y_T$ propre et plat sur T, alors Z est le graphe d'un morphisme $f : X_T \to Y_T$ ssi la première projection $Z \to X_T$ est un isomorphisme. Le lemme de 3.1 montre que cette condition définit un foncteur représentable par un ouvert de T, ce qui montre que le foncteur $\mathrm{Hom}_S(X, Y)$ est représentable par un sous-schéma ouvert du schéma $\mathrm{Hilb}_S(X \times_S Y)$.

3.3 Schémas Isom et Aut

Notons $\mathrm{Isom}_S(X, Y)$ le foncteur qui associe à un S-schéma T l'ensemble des T-isomorphismes $f : X_T \to Y_T$. Le lemme de 3.1 montre que si X, Y sont tous deux projectifs et plats sur S alors $\mathrm{Isom}_S(X, Y)$ est représentable par un ouvert du schéma $\mathrm{Hom}_S(X, Y)$. En particulier, si X est projectif et plat sur S alors le foncteur $\mathrm{Aut}_S(X) = \mathrm{Isom}_S(X, X)$ est représentable par un ouvert de $\mathrm{Hom}_S(X, X)$.