Cohomologie des schémas projectifs

Matthieu Romagny, 6 et 13 octobre 2011

Cet exposé est un petit résumé des résultats fondamentaux sur la finitude de la cohomologie des schémas projectifs.

1 Faisceaux cohérents et modules gradués

Remarque introductive. Nous commençons par une remarque. Les schémas affines sont déterminés par leurs fonctions, qui sont les morphismes vers $\mathbb{A}^1$, ou si l'on veut les sections du fibré en droites trivial : en fait si $X = \mathrm{Spec}(A)$, alors $A = \Gamma(X, \mathscr{O}_X) = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1)$. Les schémas projectifs ont trop peu de fonctions, mais on peut les reconstituer à partir des morphismes vers leurs fibrés en droites. Par exemple pour l'espace projectif $X = \mathbb{P}^n$, le module des sections du faisceau $\mathscr{O}(d)$ au-dessus de X (pour $d \geqslant 0$) est isomorphe au module des polynômes homogènes de degré d en n variables, et la somme directe des $\Gamma(X, \mathscr{O}(d))$ est isomorphe à l'anneau de polynômes en $x_0, \dots, x_n$. On retrouve $\mathbb{P}^n$ en prenant le Proj. Ceci explique l'importance des fibrés en droites, de leurs twists par $\mathscr{O}(1)$, et de la graduation associée.

Notations. Soient R un anneau de base noethérien. Soit $S = \oplus_{d\geqslant 0} S_d$ une R-algèbre graduée à degrés positifs et $X = \mathrm{Proj}(S)$. On suppose que $S_0 = R$ et que S_1 est un R-module de type fini qui engendre S comme R-algèbre, c'est-à-dire que S est un quotient d'un anneau de polynômes $R[x_0, \dots, x_n]$. Géométriquement cela signifie que X est un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^n_R$, et par définition tout R-schéma projectif est donc de la forme $\mathrm{Proj}(S)$. Le cas de $S = R[x_0, \dots, x_n]$ est d'ailleurs l'exemple fondamental. On note $S_+ = \oplus_{d\geqslant 1} S_d$ et $S^h = \cup_{d\geqslant 0} S_d$ l'ensemble des éléments homogènes de S.

Le foncteur $M \mapsto M^\sim$. Soit M un S-module gradué. Pour tout $f \in S^h$, on note $M_{(f)}$ le R-module des éléments de $M[1/f]$ de degré 0. Alors il existe un unique $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent $\mathscr{F} = M^\sim$ tel que pour tout $f \in S^h$, on ait $\Gamma(D_+(f), \mathscr{F}) = M_{(f)}$. (Cette construction est en quelque sorte l'analogue de la construction du module $M^\sim$ dans le cas des schémas affines.) Pour $n \in \mathbb{Z}$, notons $M(n)$ le module gradué tel que $M(n)_d = M_{n+d}$; on a $M(n) = M \otimes_S S(n)$ comme modules gradués. On note $\mathscr{O}_X(n) = S(n)^\sim$, c'est un module inversible et on a des isomorphismes canoniques $M(n)^\sim = M^\sim \otimes \mathscr{O}_X(n)$, en particulier $\mathscr{O}_X(m) \otimes \mathscr{O}_X(n) = \mathscr{O}_X(m+n)$, etc. On obtient un foncteur $M \mapsto M^\sim$ de la catégorie des S-modules gradués dans la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules quasi-cohérents.

Le foncteur $\Gamma_* : \mathscr{F} \mapsto \Gamma_*(\mathscr{F})$. À tout $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent $\mathscr{F}$ on associe le S-module $M = \Gamma_*(\mathscr{F}) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathscr{F}(n))$ qui est naturellement gradué.

2 Sections globales des faisceaux cohérents

On dispose du lemme classique suivant (Hartshorne, lemme II.5.14) :

Lemme. *Soient X un schéma quasi-compact et quasi-séparé, $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur X, f une section globale de $\mathscr{L}$, X_f l'ouvert des $x \in X$ tels que $f(x) \neq 0 \in k(x)$. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X. Alors,*

(1) *pour tout $s \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ dont la restriction à X_f nulle, il existe $n \geqslant 0$ tel que $f^n s = 0$ comme élément de $\Gamma(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n})$.*

(2) *pour tout $t \in \Gamma(X_f, \mathscr{F})$, il existe $n \geqslant 0$ tel que $f^n t$ s'étend en une section globale de $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes}$.*

La démonstration est facile, en recouvrant X par des ouverts affines et en utilisant la définition du localisé.

On en tire deux conséquences.

Conséquence 1. Soit $X = \operatorname{Proj}(S)$ comme ci-dessus, et soit $\mathscr{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X. Pour tout $f \in S^h$, en déroulant les définitions on voit que :

$$\Gamma(D_+(f), \Gamma_*(\mathscr{F})^\sim) = \{\, s/f^a,\ s \in \Gamma(X, \mathscr{F}(n)) \text{ où } n = a \deg(f) \,\}\,.$$

Proposition. *Le morphisme canonique de restriction $\beta : (\Gamma_*(\mathscr{F}))^\sim \to \mathscr{F}$ défini sur $D_+(f)$ par $s/f^a \mapsto (s|_{D_+(f)})/f^a$ est un isomorphisme.*

En effet, l'injectivité est le point (1) du lemme et la surjectivité est le point (2). Ceci montre que le foncteur $M \mapsto M^\sim$ est essentiellement surjectif.

Conséquence 2. Soit X un schéma, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module, $\{s_i\}$ une famille de sections globales de $\mathscr{F}$. Rappelons qu'on dit que *$\mathscr{F}$ est engendré par la famille des s_i* si pour tout $x \in X$ la fibre $\mathscr{F}_x$ est engendrée par la famille de germes $s_{i,x}$; il est équivalent de dire que le morphisme $\mathscr{O}_X^{(I)} \to \mathscr{F}$ qui envoie $e_i \in \mathscr{O}_X(U)$ sur $s_i|_U$ est surjectif. Il est équivalent de dire que $\mathscr{F}$ est engendré par (toutes) ses sections globales ou que le morphisme $f^* f_* \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ est surjectif, où l'on note $f : X \to \operatorname{Spec}(R)$ le morphisme de structure. On a (Hartshorne II.5.17, EGAII, 2.7.9) :

Théorème (Serre). *Soit X un R-schéma projectif muni d'un faisceau très ample $\mathscr{O}_X(1)$ et $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent. Alors il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, le faisceau $\mathscr{F}(n)$ peut être engendré par un nombre fini de sections globales.*

Pour démontrer cela, on choisit un plongement $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^r_R$ tel que $\mathscr{O}_X(1) = i^*\mathscr{O}(1)$. L'image directe $i_*\mathscr{F}$ est cohérente, commute au twist : $(i_*\mathscr{F})(n) = i_*(\mathscr{F}(n))$, et aux sections globales : $\Gamma(\mathbb{P}^r, i_*\mathscr{F}(n)) = \Gamma(X, \mathscr{F}(n))$. On se ramène ainsi au cas où $X = \mathbb{P}^r$. On recouvre alors X par les ouverts affines standard $U_i = D_+(x_i)$. Sur chaque U_i, le faisceau $\mathscr{F}$ est donné par un module M_i engendré par un nombre fini d'éléments $m_{i,j}$. De plus, par le point (2) du lemme il existe un n, que l'on peut supposer indépendant de i et j, tel que $(x_i)^n m_{i,j}$ s'étend en une section globale de $\mathscr{F}(n)$. La famille de ces sections globales répond à la question.

Soulignons une reformulation utile : le fait que $\mathscr{F}(n)$ soit engendré par N sections signifie que $\mathscr{F}$ est un quotient de $\mathscr{O}_X(-n)^N$.

3 Finitude de la cohomologie des schémas projectifs

Rappelons sans démonstration le calcul de la cohomologie de $\mathscr{O}(d)$ sur $\mathbb{P}^r$ à l'aide du complexe de Čech formé par les ouverts standard (Hartshorne III.5.1, EGAIII, 2.1.12). Le résultat ne nécessite d'ailleurs pas l'hypothèse que R est noethérien.

Théorème. *Soit $X = \mathbb{P}^r_R$ et d un entier. Alors,*

(1) $H^0(X, \mathscr{O}(d)) \simeq \begin{cases} \text{module des polynômes en } x_0, \dots, x_r \text{ homogènes de degré } d, \text{ si } d \geqslant 0, \\ 0 \text{ si } d < 0, \end{cases}$

(2) $H^i(X, \mathscr{O}(d)) = 0$ *pour* $0 < i < r$,

(3) $H^r(X, \mathscr{O}(d)) = H^0(X, \mathscr{O}(-r-1-d))^*$ *(dualité de Serre).*

Le théorème de finitude est alors le suivant (Hartshorne III.5.2, EGAIII, 2.2.1).

Théorème (Serre - Finitude pour les schémas projectifs). *Soit X un R-schéma projectif muni d'un faisceau très ample $\mathscr{O}_X(1)$ et $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent. Alors,*

(1) *pour tout $i \geqslant 0$, le R-module $H^i(X, \mathscr{F})$ est de type fini,*

(2) *il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et pour tout $i > 0$, on a $H^i(X, \mathscr{F}(n)) = 0$.*

Pour la preuve, on se ramène comme pour le théorème précédent au cas $X = \mathbb{P}^r$. Si $\mathscr{F}$ est un faisceau $\mathscr{O}(d)$ ou une somme directe de tels, sa cohomologie est explicite et rappelée ci-dessus et vérifie (1) et (2). Pour prouver (1) pour $\mathscr{F}$ général, on fait une récurrence descendante sur i. Si $i > r$ tous les groupes de cohomologie sont nuls, car $\mathbb{P}^r$ est recouvert par $r+1$ ouverts affines et le complexe de Čech est tronqué en degrés $\leqslant r$. Pour $i \leqslant r$, on écrit $\mathscr{F}$ comme quotient d'un faisceau $\mathscr{E} = \mathscr{O}(d)^N$ et on note $\mathscr{N}$ le noyau. On obtient une suite exacte courte et le morceau suivant de la suite exacte longue de cohomologie :

$$\dots \to H^i(X, \mathscr{E}) \to H^i(X, \mathscr{F}) \to H^{i+1}(X, \mathscr{N}) \to \dots$$

Ainsi $H^i(X, \mathscr{F})$ est extension d'un quotient de $H^i(X, \mathscr{E})$ qui est de type fini vue la forme de $\mathscr{E}$, par un sous-module de $H^{i+1}(X, \mathscr{N})$ qui est de type fini par récurrence. Comme R est noethérien, $H^i(X, \mathscr{F})$ est de type fini. Pour prouver (2), la même récurrence descendante avec des twists $\mathscr{E}(n)$, $\mathscr{F}(n)$, $\mathscr{N}(n)$ mène à la suite exacte :

$$\dots \to H^i(X, \mathscr{E}(n)) \to H^i(X, \mathscr{F}(n)) \to H^{i+1}(X, \mathscr{N}(n)) \to \dots$$

Pour n assez grand $H^i(X, \mathscr{E}(n)) = 0$ (car $\mathscr{E}$ est somme directe de twists) et $H^{i+1}(X, \mathscr{N}(n)) = 0$ (par récurrence), d'où $H^i(X, \mathscr{F}(n)) = 0$.

Remarques. a) Même si l'on est surtout intéressé par les groupes de sections globales i.e. les H^0, c'est en utilisant les H^i supérieurs qu'on parvient à montrer la finitude.

b) On déduit facilement du point (2) du théorème que pour toute suite exacte de faisceaux cohérents $\mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H}$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, la suite $H^0(X, \mathscr{F}(n)) \to H^0(X, \mathscr{G}(n)) \to H^0(X, \mathscr{H}(n))$ est exacte.

Ce théorème permet de compléter la description du foncteur $M \mapsto M^\sim$. Il est clair que ce foncteur n'est pas pleinement fidèle, car pour tout r, le module M et son tronqué $N = \tau_r M$ ont mêmes localisés homogènes $M_{(f)} = N_{(f)}$ donc induisent les mêmes $\mathscr{O}_X$-modules $M^\sim = N^\sim$. Nous allons voir que réciproquement l'égalité des tronqués assez grands est une condition nécessaire pour définir les mêmes faisceaux. Soit M un S-module gradué. En déroulant les définitions, on voit que l'on a :

$$\Gamma(D_+(f), M^\sim(n)) = M(n)_{(f)} = \{\, m/f^a,\ \deg(m) = n + a\deg(f)\,\}\,.$$

En particulier, les éléments M_n définissent avec $a = 0$ des sections globales de $M(n)^\sim$. On a alors (EGAIII, th. 2.3.1) :

Théorème. *Si M possède un tronqué $\tau_r M = \oplus_{d\geqslant r} M_d$ de type fini, alors le morphisme $\alpha : M \to \Gamma_*(M^\sim)$ qui envoie $m \in M_n$ sur la section globale correspondante de $M^\sim(n)$ est un isomorphisme en degrés assez grands. Ainsi, α induit un isomorphisme entre la catégorie des S-modules ayant un tronqué de type fini modulo la sous-catégorie des S-modules ayant un tronqué nul, et la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules cohérents.*

On se ramène comme précédemment au cas $X = \mathbb{P}^r$. On note que le théorème est vrai pour $\mathscr{O}_X$ (c'est le point (1) du calcul explicite de la cohomologie de l'espace projectif), donc pour les twists $S(n)$ et pour les sommes de twists ; en fait dans ce cas α est un isomorphisme. Dans le cas général, quitte à remplacer M par un tronqué on peut le supposer de type fini. Alors on a une suite exacte $K \to L \to M \to 0$ où K, L sont des sommes de twists. Pour un entier n, regardons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
K_n \arrow[r] \arrow[d] & L_n \arrow[r] \arrow[d] & M_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H^0(X, K^\sim(n)) \arrow[r] & H^0(X, L^\sim(n)) \arrow[r] & H^0(X, M^\sim(n)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

la première ligne est exacte, la seconde l'est pour n assez grand à cause de la remarque b) ci-dessus, et les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes par ce qui précède. Il s'ensuit que la flèche verticale de droite est un isomorphisme pour n assez grand.

4 Un contre-exemple sur un anneau non noethérien

Jusqu'à présent, l'anneau de base R était noethérien. Lorsque ce n'est pas le cas, les groupes de cohomologie des faisceaux cohérents sur l'espace projectif *ne* sont *pas* de type fini en général. Nous allons donner un contre-exemple, en suivant des indications données par Marc Chardin.

Rappelons qu'un anneau R est dit *cohérent* si tout idéal $I \subset R$ de type fini est de présentation finie. Nous allons considérer un anneau de base non cohérent, et un idéal de type fini $I = (f_0, \dots, f_n)$ qui n'est pas de présentation finie. Pour avoir un tel exemple, disons avec $n = 2$ pour simplifier, on peut considérer un cors k et

$$R = \frac{k[f_0, f_1, u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots]}{(u_i f_0 + v_i f_1, i \geqslant 1)}$$

où f_0, f_1 et les u_i, v_i sont des indéterminées. L'idéal $I = (f_0, f_1)$ est l'image du morphisme de R-modules $R^2 \to R$ qui envoie (a, b) sur $af_0 + bf_1$, dont le noyau engendré par les éléments (u_i, v_i) n'est pas de type fini.

Dans l'anneau de polynômes $A = R[x_0, \dots, x_n]$, on considère l'élément $L = f_0x_0 + \dots + f_nx_n$ et on suppose qu'il est non diviseur de zéro. Il suffit pour cela que dans R, l'idéal I contienne un élément non diviseur de 0 : en effet, si $PL = 0$ avec $P \in A$ non nul, alors pour tous $a_0, \dots, a_n \in R$, comme $x_0 - a_0$ ne divise pas 0 dans A on peut supposer que P n'est pas divisible par une puissance de $x_0 - a_0$, i.e. $P(a_0, x_1, \dots, x_n) \neq 0$, d'où $P(a_0, x_1, \dots, x_n)L(a_0, x_1, \dots, x_n) = 0$, et en spécialisant ainsi successivement les x_i on fabrique un élément $b = P(a_0, \dots, a_n)$ non nul tel que $bL(a_0, \dots, a_n) = 0$, i.e. $f_0a_0 + \dots + f_na_n$ est diviseur de 0 dans R. Dans l'exemple ci-dessus pour $n = 2$, il est clair que $f_0x_0 + f_1x_1$ n'est pas diviseur de 0.

On pose $P = \mathrm{Proj}(A) = \mathbb{P}^n_R$ et $X = V(L)$. Comme L ne divise pas 0, on a la suite exacte de faisceaux sur P :

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_P(-1) \xrightarrow{L} \mathscr{O}_P \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow 0.$$

Tordons cette suite exacte par $\mathscr{O}(m)$ et prenons la suite exacte longue de cohomologie :

$$\dots \longrightarrow H^i(P, \mathscr{O}(m)) \longrightarrow H^i(X, \mathscr{O}(m)) \longrightarrow H^{i+1}(P, \mathscr{O}(m-1)) \xrightarrow{L} H^{i+1}(P, \mathscr{O}(m)) \longrightarrow \dots$$

Pour $i = n - 1$, on obtient une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^{n-1}(X, \mathscr{O}(m)) \longrightarrow H^n(P, \mathscr{O}(m-1)) \xrightarrow{L} H^n(P, \mathscr{O}(m)).$$

Rappelons que la dualité de Serre construit un isomorphisme *trace* canonique $t : H^n(P, \omega) \simeq R$ où $\omega = \mathscr{O}(-n-1)$ est le faisceau dualisant, et établit que pour tout i, l'accouplement

$$H^i(P, \mathscr{O}(m)) \times H^{n-i}(P, \omega(-m)) \longrightarrow H^n(P, \omega)$$

est parfait. (Puisque nous sommes dans une situation où les schémas ne sont pas noethériens, il faut être prudent avec la dualité de Serre, mais dans le cas de l'espace projectif tout fonctionne sur une base arbitraire.) Notons $(-)^*$ le dual à valeurs dans $H^n(P, \omega)$. Pour $m = -n-1$, en regardant de près comment s'écrit la dualité de Serre, on voit que le morphisme L de la suite exacte ci-dessus s'identifie au morphisme $H^0(P, \mathscr{O}(1))^* \to H^0(P, \mathscr{O})^*$ qui envoie une forme φ sur la forme $\varphi(L)$. Sur l'espace $H^0(P, \mathscr{O}(1))^*$, on dispose de la base x_i^* et $x_i^*(L) = x_i^*(f_0x_0 + \dots + f_nx_n) = f_i$. Ainsi le morphisme ci-dessus envoie $a_0x_0^* + \dots + a_nx_n^*$ sur $a_0f_0 + \dots + a_nf_n$, i.e. c'est le morphisme $R^{n+1} \to R$ dont l'image est I. Notre calcul a montré que son noyau s'identifie à $H^{n-1}(X, \mathscr{O}(-n-1))$ et il n'est pas de type fini, par choix de R et I.

Pour $n = 1$, ceci donne un exemple en H^0 avec $X = \{f_0x_0 + f_1x_1\} \subset \mathbb{P}^1_R$. Il vaut mieux se retenir d'appeler X une « hypersurface de $\mathbb{P}^1$ » car il n'est pas plat sur la base $\mathrm{Spec}(R)$; il possède des fibres de dimension 0 et 1.

5 Extension aux schémas propres

Théorème (Lemme de Chow). *Soit X un R-schéma de type fini. Alors il existe un morphisme projectif et surjectif $f : X' \to X$, où X' est un R-schéma quasi-projectif ; on peut de plus supposer qu'il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $U' = f^{-1}(U)$ soit dense et que f induit un isomorphisme $U' \simeq U$. En particulier si X est propre sur R, alors X' est projectif sur R.*

Pour montrer cela, en considérant les composantes irréductibles de X (en nombre fini, car R est noethérien), on se ramène au cas où X est irréductible. Prenons ensuite un recouvrement de X par des ouverts $U_1, \dots, U_n$ affines, donc quasi-projectifs, sur R. Pour chaque i, soit $\varphi_i : U_i \to P_i$ une immersion ouverte dans un R-schéma projectif. Soit U l'intersection des U_i, P le produit des P_i, et $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : U \to P$. Le morphisme $\psi : U \to X \times P$ est une immersion qui se factorise par X', l'image schématique de ψ. Le morphisme $X' \to X$ est évidemment projectif, et surjectif car d'image dense et fermée. Il y a ensuite un peu de travail pour montrer que $X' \to P$ est une immersion, donc X' quasi-projectif sur R.

Théorème (Grothendieck - Finitude pour les schémas propres). *Soit X un R-schéma propre et $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent. Alors pour tout $i \geqslant 0$, le R-module $H^i(X, \mathscr{F})$ est de type fini.*

Notons $f : X \to \mathrm{Spec}(R)$ le morphisme de structure. À l'aide du lemme de Chow, on choisit un $g : X' \to X$ projectif et surjectif avec X' projectif sur R. La preuve générale de Grothendieck utilise alors un certain dévissage de la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules cohérents, qui permet de se limiter à montrer le résultat pour $\mathscr{F} = g_*\mathscr{F}'$, où $\mathscr{F}' = \mathscr{O}_{X'}(n)$ pour un n assez grand. Si on applique à $f' = f \circ g : X' \to \mathrm{Spec}(R)$ le point (1) du théorème de finitude pour les morphismes projectifs, on trouve que $R^i f'_* \mathscr{F}'$ est cohérent pour tout $i \geqslant 0$. Si on applique le point (2) du même théorème à g, on voit que quitte à augmenter n, on peut supposer que $R^i g_* \mathscr{F}' = 0$ pour tout $i > 0$. Cette annulation montre que la suite spectrale de Leray pour f' dégénère en des isomorphismes $R^i f_* \mathscr{F} = R^i f'_* \mathscr{F}'$ pour tout $i \geqslant 0$. Donc $R^i f_* \mathscr{F}$ est cohérent. Les détails sont dans EGAIII, th. 3.2.1.