Th de changement de base ds la cohomologie, II.

A. Rodriguez

3/11/2011.

1) Au vu des résultats exposés dans l'exposé I on se demande :

a) Peut-on voir $H^p(X_y, \mathcal{F}_y)$ comme la fibre d'un fibré sur Y ?

b) Sous quelles conditions a-t-on $H^i(K^\bullet \otimes_A M) = H^i(K^\bullet) \otimes_A M$?

Les hyp. courantes sont X, Y noeth et $f : X \to Y$ projectif

<u>Prop</u> (formule de projection) $f : X \to Y$, $\mathcal{F}$ qcoh sur X, $\mathcal{L}$ fibré sur Y. Alors on a un iso naturel $R^q f_* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} R^q f_* (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^* \mathcal{L})$

<u>Preuve</u> si $q=0$, sur des ouverts affines c'est clair utilisant le fait que $\mathcal{L}$ est plat.

Si $q \geq 1$, on note qu'en tensorisant une résolution ~~de~~ injective de $\mathcal{F}$ par un localemt libre $\mathcal{L}' = f^*\mathcal{L}$, on obtient une rés. injective de $\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{L}$. Le résultat en découle ∎

<u>Cor</u> si M est plat TF sur A, $H^q(X, \mathcal{F} \otimes_A M) = H^q(X, \mathcal{F}) \otimes_A M$.

2) Le foncteur T^i

On note $T^i : A\text{-Mod} \to A\text{-Mod}$ pour $\mathcal{F}$ plat sur Y.

$$M \mapsto H^i(X, \mathcal{F} \otimes_A M)$$

<u>Prop</u> T^i est un fct cohomologique exact au centre

<u>Dém</u> Soit $0 \to M' \hookrightarrow M \to M'' \to 0$ exacte. On obtient

$$0 \to M' \otimes \mathcal{F} \to M \otimes \mathcal{F} \to M'' \otimes \mathcal{F} \to 0$$

la SE longue de cohomologie donne ce qu'on veut ∎

<u>Prop</u> LCSSE

i) T^i exact à gauche

ii) coker $(K^{i-1} \to K^i)$ est projectif

iii) T^i est représentable par un A-module Q de TF

Montrons que (i) ⇔ (ii)

<u>Preuve</u> Soit $W^i = \mathrm{coker}(K^{i-1} \to K^i)$, on a donc une SE

$$0 \to H^i(K^\cdot) \to W^i \to K^{i+1}$$

Comme coker et $\otimes M$ commutent, on a :

$$0 \to T^i(M) \to W^i \otimes M \to K^{i+1} \otimes M .$$

Pour $0 \to M' \to M$, on a un diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} \otimes & & & & & & 0 \\ & & & & & & \downarrow \\ 0 & \to & T^i(M') & \to & W^i \otimes M' & \to & K^{i+1} \otimes M' \\ & & (1)\downarrow & & (2)\downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & T^i(M) & \to & W^i \otimes M & \to & K^i \otimes M \end{array}$$

on voit que (1) est injective ssi (2) l'est, c'est-à-dire :

T^i exact à gauche ssi W^i plat (ie projectif).

iii) ⇒ i) si $T^i(M) \simeq \mathrm{Hom}(Q, M)$ il est exact à gche

ii) ⇒ iii) on pose $(K^i)^\vee$ et $(W^i)^\vee$ les A-duaux linéaires qui sont proj. TF.

Posons $Q = \mathrm{coker}((K^{i+1})^\vee \to (W_i)^\vee)$, on a une SE :

$$(K^{i+1})^\vee \to (W_i)^\vee \to Q \to 0$$

d'où

$$0 \to \mathrm{Hom}(Q, M) \to \underset{\underset{\displaystyle W^i \otimes M}{\mathrel{\wr\mathrel{\!\wr}}}}{\mathrm{Hom}(W^{i\vee}, M)} \to \underset{\underset{\displaystyle K^{i+1} \otimes M}{\mathrel{\wr\mathrel{\!\wr}}}}{\mathrm{Hom}((K^{i+1})^\vee, M)}$$

ce qui mq $\mathrm{Hom}(Q, M) \simeq T^i(M)$ cqfd ■

<u>Prop</u> Soit la flèche canonique $\varphi : T^i(A) \otimes M \to T^i(M)$

LCSSE :

i) T^i exact à droite

ii) φ est un isomorphisme fonctoriel en M

iii) φ est surjectif

<u>Preuve</u> Comme T^i commute aux $\varinjlim$ filtrantes et $\otimes$ aussi, on se ramène à M de type fini :

$$A^r \to A^l \to M \to 0 .$$

Supposons i). On a

$$\begin{array}{ccccccc} T^i(A)\otimes A^r & \to & T^i(A)\otimes A^l & \to & T^i(A)\otimes M & \to & 0 \\ \downarrow (1) & & \downarrow (2) & & \downarrow (3) & & \\ T^i(A^r) & \to & T^i(A^l) & \to & T^i(M) & \to & 0 \end{array}$$

Alors (1) et (2) sont des iso donc (3) aussi, ce qui montre que i) ⇒ ii).

ii) ⇒ iii) est clair.

iii) ⇒ i) on se donne $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ exacte

on regarde
$$\begin{array}{ccccccc} T^i(A)\otimes M' & \to & T^i(A)\otimes M & \to & T^i(A)\otimes M'' & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ T^i(M') & \to & T^i(M) & \to & T^i(M'') & \underset{?}{\to} & 0 \end{array}$$

et on conclut par chasse au diagramme facile. ■

Cor on a une équivalence :

i) T^i est exact

ii) T^i exact à droite et $T^i(A)$ est projectif TF

3) Sur une fibre

$Y = \operatorname{spec}(A)$, $y = p \in \operatorname{spec}(A)$, on note

$$T^i_y = H^i(K^\bullet \otimes_A M) \otimes A_p$$
$$= H^i(K_p \otimes M) \quad \text{pour } M \text{ un } A_p\text{-module.}$$

Prop si T^i_y est exact (nous dirons : T^i est exact en y) alors il l'est dans un vois. de y.

Dém cadeau ■

Théo (Grauert) Soit Y un schéma intègre. S'il existe $i \geq 0$ tq $\dim_{k(y)} H^i(X_y, \mathcal{F}_y)$ est cste alors $R^i f_* \mathcal{F}$ est loc libre et de plus $R^i f_* \mathcal{F} \otimes k(y) \to H^i(X_y, \mathcal{F}_y)$ est un iso.

Dém Comme $H^i(X_y, \mathcal{F}_y) = H^i(K^\bullet \otimes k(y))$ alors
$\dim_{k(y)} H^i(X_y, \mathcal{F}_y) = \dim_{k(y)} T^i(k(y)) =: t^i(k(y))$

On avait vu que $T^i(k(y)) = \ker(W^i \otimes k(y) \to K^{i+1} \otimes k(y))$
on a une suite exacte
$$W^i \to K^{i+1} \to W^{i+1} \to 0$$
donc $t^i(k(y)) = \dim W^i \otimes k(y) + \dim W^{i+1} \otimes k(y) - \dim K^{i+1} \otimes k(y)$
or on sait que sur un anneau loc. noeth. intègre,
si un A-module TF N vérifie $\dim(N \otimes k) = \dim(N \otimes K)$
alors il est libre.
On en déduit que W^i_y est libre, donc W^i loc libre en y
Donc T^i et T^{i+1} sont ex. à gauche et T^i est exact.
Alors $T^i(A)$ est loc. libre, or $\widetilde{T^i(A)} \simeq R^i f_* \mathcal{F}$ ∎

4) Complétion et th. des fonctions formelles

Prop (Mittag-Leffler) Soit $0 \to (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (C_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$
une SE de systèmes projectifs
Si $A_{n+1} \to A_n$ est surjectif pour tout $n \geq n_0$,
alors la SE reste exacte par $\varprojlim$
En fait il suffit de supposer que $\forall n \in \mathbb{N}$ la suite
$\varphi_{n,m}(A_m)$ $(\subset A_n)$, indicée par m, stationne.

Dém C'est un rappel non démontré. ∎
Un autre rappel
Prop A local noeth, M de type fini. Alors
i) $\hat{M} \simeq M \otimes_A \hat{A}$
ii) $A \to \hat{A}$ est fidèlement plat
iii) si $N \subset M$ alors $\hat{N} \subset \hat{M}$ est continue (ie la top-adique sur $\hat{N}$ est la top. induite).

Cadre $f : X \to Y$, $y \in Y$, $Y_n = \mathrm{spec}\left(\mathcal{O}_{Y,y}/m_y^n\right)$, $X_n = X \times_Y Y_n$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{X_n}$.

On a un diagramme comm.

$$\begin{array}{ccc} R^q f_* \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{Y,y}/m^{n+1} & \longrightarrow & H^q(X_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^q f_* \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{Y,y}/m^n & \longrightarrow & H^q(X_n, \mathcal{F}_n) \end{array}$$

d'où par $\varprojlim$ une flèche $R^q f_* \mathcal{F} \otimes \hat{\mathcal{O}}_{Y,y} \to \varprojlim H^q(X_n, \mathcal{F}_n)$

<u>Th</u> (des fn formelles) C'est un iso.
Preuve, cf la littérature.
On en déduit :

<u>Th</u> supposons que pour un i, $T^i(A) \otimes k(y) \to T^i(k(y))$ est surjectif. Alors T^i est exact à droite en y.

<u>Dém</u> <u>1er cas</u> si M est de lg finie
Si $lg(M) = 1$ alors $M = A/m = k(y)$ et l'hyp nous dit que $T^i(A) \otimes M \to T^i(M)$ ~~est~~ surj.
Si $lg(M)$ qcq on obtient le résultat par récurrence.
<u>2e cas</u> M de TF. Alors les $M/m^n M$ sont de lg finie
donc $\quad T^i(A) \otimes M/m^n \xrightarrow[\varphi_n]{} T^i(M/m^n)$ surj.

La suite $(\ker \varphi_n)$ est un syst proj de modules de lg finie qui donc satisfait la condition (ML).
Par le th des fn formelles,
$$T^i(M) \otimes \hat{\mathcal{O}}_{Y,y} = \varprojlim T^i(M/m^n M)$$
Il s'ensuit que $\varprojlim T^i(A) \otimes M/m^n M \to T^i(M) \otimes \hat{\mathcal{O}}$ surj
$$\begin{array}{c} \varprojlim T^i(A) \otimes M/m^n M \\ \| \\ T^i(A) \otimes \hat{M} \end{array}$$

La complétion étant fidèlement plate, on déduit que $T^i(A)\otimes M \to T^i(M)$ est surjectif.

<u>3e cas</u> Si M est qcq, il est $\varinjlim$ de ses sous-modules de type fini. ∎

<u>Cor</u> $f : X \to Y$ propre, X, Y noeth, $\mathcal{F}$ qcoh sur X, plat / Y.

i) Si $R^i f_* \mathcal{F} \otimes k(y) \to H^i(X_y, \mathcal{F}_y)$ est surj. alors elle l'est dans un $V(y)$, et c'est m̂ un iso.

ii) Si $\varphi^i(y) : T^i(A) \otimes k(y) \to T^i(k(y))$ est surjective, on a équivalence : a) $\varphi^{i-1}(y)$ surj.

b) $R^i f_* \mathcal{F}$ est libre sur un $V(y)$.