Th. de changement de base dans la cohomologie

Florent Martin.
20 oct. 2011

§1. Changement de base plat.

① Changement de base plat

$\exists$ morphisme $u^* R^i f_* \mathcal{F} \to R^i g_* v^* \mathcal{F}$,

$\mathcal{F}$ faisceau sur X.

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{v} & X \\ g\downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

On a déjà utilisé (dans l'exp. sur les grassmanniennes) le cas d'un chgt de base $Y' \to Y$ qui est une ext. de corps.

② Changement de base par passage à une fibre

$$R^i f_* \mathcal{F} \otimes k(y) \longrightarrow H^i(X_y, \mathcal{F}_y)$$

$$\begin{array}{ccc} X_y & \xrightarrow{v} & X \\ g\downarrow & & \downarrow f \\ \mathrm{spec}\, k(y) & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

On montrera :

Th (Groth.) si $X \xrightarrow{f} Y = \mathrm{spec}(A)$ (noeth.) est propre, et $Y' = \mathrm{spec}(B) \to Y$ est un chgt de base affine, alors $R^i g_* v^* \mathcal{F} \simeq H^i(K^\bullet \otimes_A B)$ ($\mathcal{F}$ coh, Y-plat) pour un certain complexe $K^\bullet$ de A-modules finis l.l. (indép. de B !)

① Changement de base plat

Th $f : X \to Y$ séparé TF avec Y noeth, $\mathcal{F}$ qcoh sur X, $u : Y' \to Y$ plat avec Y' noeth. Alors pour tout i il existe un iso canonique $u^* R^i f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} R^i g_* v^* \mathcal{F}$

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{v} & X \\ g\downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

Dém : ops Y, Y' affines : $Y = \mathrm{spec}(A)$, $Y' = \mathrm{spec}(A')$.

Alors $R^i f_* \mathcal{F}$ est le fsc associé au A-module $H^i(X, \mathcal{F})$.

On choisit un recouvrement affine $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_i)$ de X.

Par Čech : $H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$ où

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \bigoplus_{i_0 < \dots < i_p} \Gamma(\mathcal{U}_{i_0} \cap \dots \cap \mathcal{U}_{i_p}, \mathcal{F}).$$

Soit $v^{-1}(\mathcal{U}) = \{v^{-1}(\mathcal{U}_i)\}$ rec. affine ouvert de X'. Donc

$$H^i(X', v^* \mathcal{F}) = H^i(C^\bullet(v^{-1}\mathcal{U}, v^* \mathcal{F}))$$

Par ailleurs $v^* R^i f_* \mathcal{F}$ est isomorphe à $H^i(X, \mathcal{F}) \otimes_A A'$, et $R^i g_* v^* \mathcal{F}$ est donné par le module sur A' : $H^i(X', v^* \mathcal{F})$.

On veut une flèche

$$\begin{array}{ccc} H^i(X, \mathcal{F}) \otimes_A A' & \longrightarrow & H^i(X', v^* \mathcal{F}) \\ \| & & \| \\ H^i(C^\cdot(\mathcal{U}, \mathcal{F})) & \longrightarrow & H^i(C^\cdot(v^{-1}\mathcal{U}, v^*\mathcal{F})) \end{array}$$

Dans les complexes de Čech, on a

à gauche les modules $\Gamma(\mathcal{U}_{i_0} \cap \ldots \cap \mathcal{U}_{i_p}, \mathcal{F}) \otimes_A A'$

à droite les modules $\Gamma(v^{-1}\mathcal{U}_{i_0} \cap \ldots \cap v^{-1}\mathcal{U}_{i_p}, v^* \mathcal{F})$

En fait, $C^\cdot(v^{-1}\mathcal{U}, v^*\mathcal{F}) \simeq C^\cdot(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \otimes_A A'$. On a toujours un morphisme $H^i(C^\cdot(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \otimes_A A' \to H^i(C^\cdot(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \otimes_A A')$ et comme A'/A est plat c'est un iso. ∎

Rq si $f : X \to Y$ affine, on a tjs $v^* f_* \mathcal{F} \simeq g_* v^* \mathcal{F}$

ceci provient du fait que $R^i f_* \mathcal{F} = 0$ si $i > 0$.

② le complexe de Grothendieck

Rappel : si $\begin{cases} A \text{ est noethérien} \\ M \text{ de type fini} \end{cases}$, LCSSE :

M plat $\Leftrightarrow$ M projectif $\Leftrightarrow$ $\tilde{M}$ localement libre.

Th Soit $f : X \to Y = \operatorname{spec}(A)$ avec A noethérien.

On suppose f propre et on prend $\mathcal{F}$ cohérent sur X, plat sur Y. Alors il existe un complexe fini

$$K^\cdot = \quad 0 \to K^0 \to \ldots \to K^n \to 0$$

de A-modules plats de type fini tels que

$$\forall M \text{ A-module}, \quad H^p(X, \mathcal{F} \otimes_A M) \simeq H^p(K^\cdot \otimes_A M)$$

$$\Big(H^p(X, \overset{\text{// def}}{\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X}} f^*(\tilde{M})) \Big).$$

Dém : on commence par un fait : si $X = \mathrm{Spec}(B)$ est affine et $M \in \mathrm{Mod}(B)$, alors $\tilde{M}$ est plat sur Y ssi M est A-plat.

On prend un recouvrement ouvert affine fini $\mathcal{U}_i$ de X. On veut calculer $H^i(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}\otimes M))$. Les morceaux du cplxe de Čech sont des

$$\Gamma(\mathcal{U}_{i_0}\cap\dots\cap\mathcal{U}_{i_p}, \mathcal{F}\otimes M) = \Gamma(\mathcal{U}_{i_0}\cap\dots\cap\mathcal{U}_{i_p}, \mathcal{F})\otimes_A M$$

d'où finalement $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}\otimes_A M) = C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})\otimes_A M$.

Le problème est que le complexe $C^\bullet = C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ n'est pas à morceaux de type fini. En revanche comme f est propre, sa cohomologie est de type fini ; par ailleurs $\mathcal{F}$ étant Y-plat, $C^\bullet$ est A plat.

Lm1 si $C^\bullet = (0\to C^0\to\dots\to C^n\to 0)$ est un complexe de A-modules plat à cohomologie de type fini, il existe un quasi-isomorphisme $K^\bullet \to C^\bullet$ avec un complexe $K^\bullet = (0\to K^0\to\dots\to K^n\to 0)$ de $\hat{m}$ longueur, avec K^i plat de type fini.

Dém (Lm1) on construit $K^n, K^{n-1}, \dots$ comme suit. Si on a $K^m \to K^{m+1}\to\dots\to K^n\to 0$ avec K^i $(i\geq m)$ libre TF avec une flèche $\phi_{\geq m} : K_{\geq m}\to C_{\geq m}$

tq $\begin{cases} H^i(\phi_{\geq m}) \text{ iso } \forall\, i > m \\ \text{et } \ker\partial_m \to H^m(C^\bullet)\to 0. \end{cases}$

alors on construit K^{m-1}, ϕ_{m-1} comme suit.

$$\begin{tikzcd}
 & K^m \arrow[r, "\partial_m"] \arrow[d, "\phi_m"] & K^{m+1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{m+1}"] & \dots \\
C^{m-1} \arrow[r] & C^m \arrow[r, "d_m"'] & C^{m+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Là, je décroche. ■

Lm2 ... ■

■

En particulier, on voit que si $y \in Y$ on a

$$H^i(X_y, \mathcal{F}_y) \simeq H^i(K^\bullet \underset{A}{\otimes} k(y)).$$

③ Application au poly. de Hilbert

<u>th</u> $f : X \to Y$ propre avec Y noethérien, $\mathcal{F}$ coh. sur X et plat sur Y. Alors

(a) $\chi : y \mapsto \sum_i (-1) \dim_{k(y)} H^i(X_y, \mathcal{F}_y)$ est loc. cste

(b) $y \mapsto \dim_{k(y)} H^i(X_y, \mathcal{F}_y)$ est scs

<u>Dém</u> (a) ops $Y = \mathrm{spec}(A)$ affine assez petit. Alors les K^i du cplx de G. sont libres, et

$$\chi(y) = \sum (-1)^i \dim (K^i \otimes k(y)) \text{ est cst.}$$

(b) On a $\quad K_y^{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} K_y^i \xrightarrow{d_i} K_y^{i+1}$

$$\dim H^i(K_y) = \underbrace{\dim (K_y^i)}_{\text{constant}} - (\underbrace{\dim \mathrm{im}\, d_i + \dim \mathrm{im}\, d_{i-1}}_{\text{sci+sci}})$$

Je dis que la fn : $\dim(\mathrm{im}\, d_i)$ est sci / Y.

En effet, $\dim(\mathrm{im}(d_{iy})) \geq r$

ssi $\exists\, \Delta$ mineur extrait de taille r de la matrice représentant d_i, tel que $\Delta_y \neq 0$.

Mais si cela est vrai en un pt, c'est vrai dans un voisinage.