

Stabilité des courbes projectives lisses

d'après Mumford et Gieseker

Matthieu Romagny, 10 et 17 décembre 2013

Table des matières

1	Commentaires historiques et bibliographiques	1
2	Situation du problème	2
3	Traduction du critère numérique de stabilité	2
4	Espaces de sections globales de fibrés en droites sur les courbes (rappels)	4
5	Filtration de $\mathcal{O}(1)$	5
6	Polygone de Newton	6

1 Commentaires historiques et bibliographiques

Au chapitre 5, § 4 de son livre *Geometric Invariant Theory* (1965), Mumford construit le morphisme de Hilbert-Chow

$$\phi : \text{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^{P(x)} \longrightarrow \text{Div}^{d,d}(\check{\mathbb{P}}_n^2)$$

depuis un schéma de Hilbert vers un schéma de diviseurs. L'image de ϕ est incluse dans la variété de Chow¹, une certaine sous-variété du schéma Div. Mumford associe à toute courbe projective lisse un *point de Hilbert* dans Hilb, puis via ϕ un *point de Chow*. Pour construire l'espace de modules des courbes, il étudie la stabilité du point de Chow à l'aide du critère de stabilité « de Hilbert-Mumford ». Par la suite, Gieseker a simplifié l'approche en démontrant directement la stabilité du point de Hilbert, évitant ainsi le détour par le morphisme de Hilbert-Chow. La référence principale pour l'exposé de ces améliorations est D. Gieseker, *Lectures on moduli of curves*, TATA Institute, 1982, accessible à l'adresse :

<http://www.math.tifr.res.in/~publ/ln/index.html>.

1. Pour une première introduction à la construction classique des variétés de Chow voir Harris, *Algebraic Geometry*, Springer, Lecture 21 et pour une étude plus fouillée voir Kollár, *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Springer, chapitre 1. Rappelons brièvement de quoi il s'agit. Si $X \subset \mathbb{P}^n$ est une variété projective de dimension r , l'ensemble des $(r+1)$ -uplets d'hyperplans de \mathbb{P}^n qui ont la même intersection avec X est une hypersurface de $(\mathbb{P}^n)^{r+1}$. Son équation multihomogène est la *forme de Chow* de X ; les coefficients de cette équation définissent un point c_X d'un certain espace projectif \mathbb{P}^N appelé *point de Chow* de X ; l'ensemble des points c_X avec $X \subset \mathbb{P}^n$ de dimension r et de degré d est la *variété de Chow* $\mathcal{C}_{r,d,n} \subset \mathbb{P}^N$.

On en trouve un résumé dans la note suivante : D. Gieseker, *Geometric invariant theory and applications to moduli problems*, Invariant theory (Montecatini, 1982), 45–73, Lecture Notes in Math. 996, Springer, 1983, accessible à l'adresse :

<http://perso.univ-rennes1.fr/matthieu.romagny/GIT/Gieseker.pdf>.

C'est la section 4 de cette dernière note qui a servi de base pour le présent exposé.

2 Situation du problème

Soient $g \geq 2$, $m \geq 3$, $P(x) = (2mx - 1)(g - 1)$, $N = P(1) - 1 = m(2g - 2) - g$. On a vu (exposé de Laurent Moret-Bailly) que les familles de sous-variétés $C \subset \mathbb{P}^N$ qui sont :

- 1) des courbes projectives lisses de genre g ,
- 2) non dégénérées (i.e. incluses dans aucun hyperplan),
- 3) plongées m -canoniquement, c'est-à-dire que $\mathcal{O}(1)|_C \simeq (\Omega_C^1)^{\otimes m}$,

sont classifiées par un schéma quasi-projectif H_m , sous-schéma du schéma de Hilbert $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$. Un commentaire : pour les familles sur une base générale, la formulation correcte des trois conditions ci-dessous (et notamment de la troisième) est légèrement différente, mais nous simplifions ici. Un deuxième commentaire : dans l'exposé de Laurent on considérait le cas $m = 3$ pour fixer les idées, mais tout fonctionne pareil pour $m \geq 3$ quelconque, et nous aurons besoin d'utiliser ces constructions pour m grand.

Le groupe PGL_{N+1} agit sur \mathbb{P}^N et par là sur le schéma de Hilbert ; cette action stabilise H_m . En fait, il est mieux de travailler avec son revêtement fini $G = \text{SL}_{N+1}$, car l'action de celui-ci se relève à la représentation naturelle dans $V = H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1))$; et ce changement de groupe ne change pas le quotient. Notre objectif est de montrer que H_m possède un quotient géométrique, qui est alors (voir encore l'exposé de Laurent) l'espace de modules des courbes de genre g . Dans ces deux exposés on va montrer, à l'aide du critère numérique de stabilité de Hilbert-Mumford, que le point de Hilbert $h_m(C) \in H_m$ d'une courbe C est stable pour l'action de G . D'après le théorème de quotient vu dans l'exposé de Christophe Ritzenthaler, l'existence du quotient géométrique en découlera.

3 Traduction du critère numérique de stabilité

Rappelons la construction du schéma de Hilbert et du point qui y correspond à C . On part de l'application de restriction :

$$\psi : H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(m)) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{O}(m))$$

dont le noyau est composé des polynômes homogènes qui s'annulent sur C . Les résultats fondamentaux de Grothendieck sur le changement de base dans la cohomologie assurent qu'il existe un entier M ne dépendant que de P (mais pas de la courbe C) tel que dès que $m \geq M$, l'application ψ est surjective, son noyau engendre l'idéal homogène de C , et les groupes de cohomologie supérieure $H^i(C, \mathcal{O}(m))$ s'annulent ($i \geq 1$). En particulier

$\ker(\psi)$ détermine C et $\dim H^0(C, \mathcal{O}(m)) = P(m)$. Notons k le corps de base de C , alors la puissance extérieure maximale :

$$\wedge^{P(m)} \psi : \wedge^{P(m)} H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(m)) \longrightarrow \wedge^{P(m)} H^0(C, \mathcal{O}(m)) \simeq k,$$

est surjective et détermine donc un point de l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ avec

$$V = \wedge^{P(m)} H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(m)).$$

Le schéma H_m vit dans cet espace projectif, et nous prendrons $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ comme faisceau ample G -linéarisé pour appliquer le critère de stabilité ; la fibre de L au point $h_m(C) \in \mathbb{P}(V)$ est l'image de $\wedge^{P(m)} \psi$. Rappel de l'exposé de Christophe Mourougane :

Critère de stabilité de Hilbert-Mumford. *Le point $x = h_m(C) \in \mathbb{P}(V)$ est stable pour l'action de G si et seulement si pour tout sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbb{G}_m \rightarrow G$, l'action induite de \mathbb{G}_m sur la fibre de $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ au point limite $\lambda(0)x$ se fait par multiplication par un caractère $\alpha \mapsto \alpha^r$ avec $r < 0$.*

Soit λ un sous-groupe à un paramètre de G . Pour appliquer le critère, choisissons une base X_0, \dots, X_N de $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1))$ qui diagonalise l'action de \mathbb{G}_m induite par λ , i.e.

$$\lambda(\alpha)X_i = \alpha^{r_i}X_i$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{G}_m$, où r_i est le poids correspondant. Le poids d'un monôme

$$M = X_0^{i_0} \dots X_N^{i_N}$$

est alors égal à $\sum i_s r_s$; on le note $w_\lambda(M)$. L'action du sous-groupe à un paramètre sur le point de Hilbert $x = h_m(C)$ qui n'est autre que $\wedge^{P(m)} \psi$ est donnée par

$$(\lambda(\alpha) \wedge^{P(m)} \psi)(M_1 \wedge \dots \wedge M_{P(m)}) = \alpha^{\sum w_\lambda(M_i)} \psi(M_1) \wedge \dots \wedge \psi(M_{P(m)})$$

avec M_i des monômes de degré m en X_0, \dots, X_N . Pour calculer le point limite $\lambda(0) \wedge^{P(m)} \psi$, procédons ainsi. Appelons *vecteurs distingués* les éléments $M_1 \wedge \dots \wedge M_{P(m)}$ d'une base de V dont l'image par $\wedge^{P(m)} \psi$ est non nulle, et notons w_{\min} le minimum des poids $\sum w_\lambda(M_i)$ des vecteurs distingués. Comme points de $\mathbb{P}(V)$, on a

$$\lambda(\alpha) \wedge^{P(m)} \psi = \alpha^{-w_{\min}} \lambda(\alpha) \wedge^{P(m)} \psi$$

ce qui permet de passer à la limite lorsque $\alpha \rightarrow 0$ pour trouver :

$$\lambda(0) \wedge^{P(m)} \psi = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-w_{\min}} \lambda(\alpha) \wedge^{P(m)} \psi.$$

Celui-ci agit comme $\wedge^{P(m)} \psi$ sur les vecteurs distingués de poids minimal, et comme 0 sur les autres. Par ailleurs, l'action de \mathbb{G}_m sur la fibre de $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ (le but de $\wedge^{P(m)} \psi$) au point limite est encore donnée par multiplication par $\alpha^{\sum w_\lambda(M_i)}$. Nous avons finalement montré :

Proposition 1. *Le point $h_m(C)$ est stable si et seulement si le minimum des poids des vecteurs distingués est < 0 .* \square

Nous allons utiliser cela pour montrer que quitte à augmenter M , pour tout $m \geq M$ le point $x = h_m(C)$ est stable. En fait, nous nous contenterons de montrer que pour une courbe fixée, pour tout m assez grand son point de Hilbert est stable ; en étant soigneux dans les preuves, il n'est pas très difficile de voir qu'on trouve effectivement un M uniforme en la courbe, mais nous nous concentrerons sur les autres difficultés. Pour finir, signalons qu'on peut montrer, utilisant des arguments complémentaires, qu'en fait $m = 3$ convient, c'est-à-dire que le point tricanonique est stable ; nous ne le ferons pas ici.

Guide pour la suite. En deux mots, pour montrer que $h_m(C)$ est stable pour m assez grand, la stratégie est la suivante : on munit $\mathcal{O}_C(1)$ d'une filtration \mathcal{F}_\bullet obtenue en lui ajoutant ses sections globales une à une. On introduit alors une quantité qui se trouve être le terme dominant de l'asymptotique lorsque $m \rightarrow \infty$ du poids total d'une base bien choisie de $H^0(C, \mathcal{O}_C(m))$. Son expression fait intervenir les degrés des crans de la filtration \mathcal{F}_\bullet et les points de rupture du polygone de Newton associé aux poids de l'action du sous-groupe à un paramètre. Il reste à montrer que ce terme dominant est < 0 , ce que l'on fait à l'aide de la géométrie de la courbe (théorèmes de Riemann-Roch et Clifford, que nous allons rappeler tout de suite) et de la combinatoire du polygone de Newton.

4 Espaces de sections globales de fibrés en droites sur les courbes (rappels)

Nous aurons besoin d'estimer la dimension de l'espace des sections globales d'un fibré en droites sur une courbe. Cette courte section se contente de rappeler deux théorèmes fondamentaux classiques dont on pourra trouver des preuves dans les ouvrages suivants :

- Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, 1977.
- Arbarello, Cornalba, Griffiths, Harris, *Geometry of Algebraic Curves*, Springer, 1985.
- Gieseker, *Lectures on moduli of curves*, TATA Institute, 1982.

Soit C une courbe projective, lisse, connexe, de genre g et \mathcal{L} un fibré en droites sur C . Pour $i \geq 0$, on note $h^i(\mathcal{L}) = \dim H^i(C, \mathcal{L})$.

Théorème de Riemann-Roch. *On a $h^0(\mathcal{L}) - h^1(\mathcal{L}) = \deg(\mathcal{L}) + 1 - g$.*

Ce résultat fondamental est utile notamment dans le cas *non spécial* où $h^1(\mathcal{L}) = 0$. Par exemple, on est dans le cas non spécial lorsque $\deg(\mathcal{L}) \geq 2g - 1$ car alors $\mathcal{M} := \Omega_C^1 \otimes \mathcal{L}^{-1}$ est de degré < 0 et donc n'a pas de section globale non nulle (si s est une section globale non nulle de \mathcal{M} , son diviseur de zéros D est un diviseur effectif, donc de degré ≥ 0 , tel que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}(D)$). Alors, par dualité de Serre $h^1(\mathcal{L}) = h^0(\Omega_C^1 \otimes \mathcal{L}^{-1}) = 0$.

Théorème de Clifford. *On a $h^0(\mathcal{L}) - 1 \leq \deg(\mathcal{L})/2$ si \mathcal{L} est engendré par ses sections globales et si $\deg(\mathcal{L}) \leq 2g - 1$.*

Ce résultat est utile notamment dans le cas *spécial* où $h^1(\mathcal{L}) \neq 0$.

5 Filtration de $\mathcal{O}(1)$

Nous conservons les notations des sections 2 et 3, et on note $d = 2m(g - 1)$ le degré de C dans \mathbb{P}^N . On fixe un sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbb{G}_m \rightarrow G$ et une base X_0, \dots, X_ℓ de $H^0(C, \mathcal{O}_C(1))$ telle que $\lambda(\alpha)X_i = \alpha^{r_i}X_i$ avec des poids $r_0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_\ell$.

On note \mathcal{F}_i le sous-faisceau de $\mathcal{O}_C(1)$ engendré par les sections X_0, \dots, X_i . C'est un faisceau sans torsion car sous-faisceau de $\mathcal{O}_C(1)$; c'est donc un faisceau inversible i.e. un fibré en droites, et on a une filtration

$$\mathcal{O}_C = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_\ell = \mathcal{O}_C(1).$$

On note $e_i = \deg(\mathcal{F}_i)$. Dans la section suivante, nous considérerons le polygone de Newton des points (k, r_k) , et les abscisses $1 = i_1 < \dots < i_k = \ell$ de ses points de rupture fourniront des entiers auxquels nous appliquerons la proposition suivante.

Proposition 2. *Supposons qu'il existe des entiers $1 = i_1 < \dots < i_k = \ell$ tels que*

$$\frac{1}{2} \sum_f (e_{i_f} + e_{i_{f+1}})(r_{i_{f+1}} - r_{i_f}) > r_\ell d.$$

Alors $h_m(C)$ est stable si $m = (L + 1)N$ avec $N \gg L \gg 0$.

Preuve. On va introduire une filtration convenable de $H^0(C, \mathcal{O}_C((L + 1)N))$.

Notation. Si \mathcal{L}_i est un fibré en droites et W_i un sous-espace de $H^0(C, \mathcal{L}_i)$, pour $i = 1, 2$, alors on note $W_1 W_2$ le sous-espace de $H^0(C, \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2)$ engendré par les éléments de la forme $w_1 \otimes w_2$ avec $w_i \in W_i$; et on note W^2 si $W_1 = W_2$, etc.

Maintenant soient $0 \leq p \leq L$ deux entiers et introduisons $V_i = H^0(C, \mathcal{F}_i)$ et

$$V_{i,j} = V_i^{L-p} V_j^p V_\ell.$$

Observons que $\mathcal{F}_\ell = \mathcal{O}_C(1)$ de sorte que V_ℓ , et donc aussi $V_{i,j}$, définit un système linéaire très ample. On peut utiliser ce fait pour tordre par $\mathcal{O}(N)$ pour un N assez grand de manière à annuler un certain H^1 et montrer ainsi (je cache les détails mais il ne s'agit que de quelques lignes peu difficiles) que :

$$V_{i,j}^N = H^0(C, (\mathcal{F}_i^{L-p} \otimes \mathcal{F}_j^p \otimes \mathcal{O}_C(1))^{\otimes N}).$$

Pour N grand, le h^1 du faisceau qui apparaît ici s'annule et on déduit alors de Riemann-Roch que

$$\dim V_{i,j}^N = N((L - p)e_i + pe_j + d) + 1 - g.$$

On considère alors la filtration suivante :

$$\begin{aligned} (V_{i_1}^L V_\ell)^N &\subset (V_{i_1}^{L-1} V_{i_2} V_\ell)^N \subset \dots \subset (V_{i_1} V_{i_2}^{L-1} V_\ell)^N \subset (V_{i_2}^L V_\ell)^N \\ &= (V_{i_2}^L V_\ell)^N \subset (V_{i_2}^{L-1} V_{i_3} V_\ell)^N \subset \dots \subset (V_{i_2} V_{i_3}^{L-1} V_\ell)^N \subset (V_{i_3}^L V_\ell)^N \\ &\quad \vdots \\ &= (V_{i_{k-1}}^L V_\ell)^N \subset (V_{i_{k-1}}^{L-1} V_{i_k} V_\ell)^N \subset \dots \subset (V_{i_{k-1}} V_{i_k}^{L-1} V_\ell)^N \subset (V_{i_k}^L V_\ell)^N. \end{aligned}$$

Nous allons majorer le poids total T d'une base de $H^0(C, \mathcal{O}_C((L+1)N)) = (V_{i_k}^L V_\ell)^N$ adaptée à cette filtration, en utilisant le fait que $V_{i_j}^N$ est engendré par des monômes dont le λ -poids est $\leq N((L-p)r_i + pr_j + r_\ell)$. Dans la s -ième ligne, les sauts de dimension sont tous égaux à $N(e_{i_{s+1}} - e_{i_s})$, et on trouve :

$$\begin{aligned} T \leq & N^2(Lr_{i_1} + r_\ell)e_\ell + \sum_{p=1}^L N^2((L-p)r_{i_1} + pr_{i_2} + r_\ell)(e_{i_2} - e_{i_1}) \\ & \vdots \\ & + \sum_{p=1}^L N^2((L-p)r_{i_{k-1}} + pr_{i_k} + r_\ell)(e_{i_\ell} - e_{i_{\ell-1}}). \end{aligned}$$

Le terme dominant lorsque $N, L \rightarrow \infty$ est

$$\frac{1}{2}N^2L^2 \sum_f (e_{i_{f+1}} - e_{i_f})(r_{i_{f+1}} + r_{i_f}) = N^2L^2 \left(r_\ell e_\ell - \frac{1}{2} \sum_f (e_{i_{f+1}} + e_{i_f})(r_{i_{f+1}} - r_{i_f}) \right).$$

Puisque $e_\ell = d$, l'hypothèse sur i_1, \dots, i_k montre que ce terme tend vers $-\infty$ lorsque $N, L \rightarrow \infty$. Ainsi, le critère numérique tel que formulé dans la Proposition 1 donne la conclusion. \square

6 Polygone de Newton

Pour conclure, nous allons appliquer la Proposition 2 après avoir minoré $e_i = \deg(\mathcal{F}_i)$ et trouvé une suite i_1, \dots, i_k convenable.

Proposition 3. *On a $e_i > di/\ell$ si $0 < i < \ell$, et $e_i = di/\ell$ si $i = 0$ ou $i = \ell$.*

Preuve. Si $i = 0$ on a $\mathcal{F}_0 = \mathcal{O}_C$ dont le degré est $e_0 = 0$, et si $i = \ell$ on a $\mathcal{F}_\ell = \mathcal{O}_C(1)$ dont le degré est $e_\ell = d$. Ainsi on a bien $e_i = di/\ell$ dans ces cas. Pour traiter les cas restants, nous utiliserons le fait que

$$h^0(\mathcal{F}_i) \geq i + 1$$

pour $0 \leq i \leq \ell$, puisque l'espace $H^0(C, \mathcal{F}_i)$ possède les sections globales X_0, \dots, X_i .

Si $e_i \geq 2g - 1$, par Riemann-Roch et le commentaire qui le suit, on a $h^1(\mathcal{F}_i) = 0$ donc

$$e_i = h^0(\mathcal{F}_i) + g - 1 \geq i + g.$$

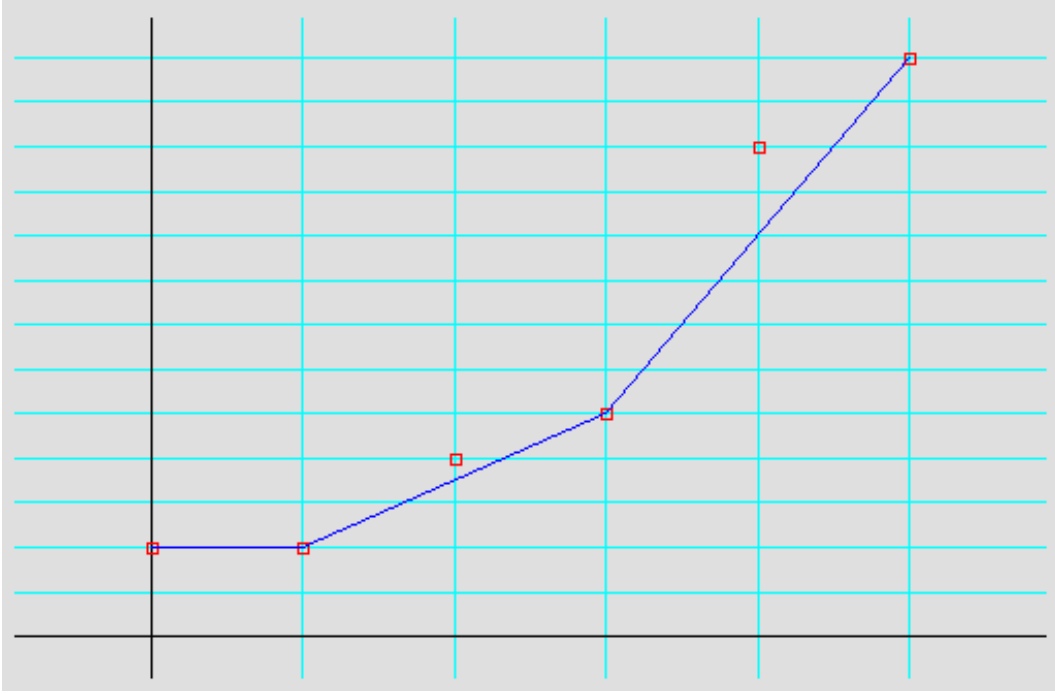
Utilisant le fait que $h^0(\mathcal{F}_\ell) = \ell + 1$ (définition de ℓ), pour $i = \ell$ on obtient $d = e_\ell = (\ell + 1) + g - 1 = \ell + g$. Lorsque $0 < i < \ell$, on trouve $d = \ell + g > i + g$. En multipliant par g puis en ajoutant di , ceci entraîne immédiatement $i + g > \frac{d}{d-g}i = di/\ell$. Ainsi $e_i \geq i + g > di/\ell$.

Si $e_i \leq 2g - 2$, le théorème de Clifford montre que

$$e_i \geq 2(h^0(\mathcal{F}_i) - 1) \geq 2i.$$

Par ailleurs, comme $d = 2m(g - 1) > 2g$ et que la fonction $d \mapsto d/(d - g)$ est strictement décroissante sur $[2g, +\infty[$, on a $2i > \frac{d}{d-g}i = di/\ell$. On trouve encore $e_i \geq i + g > di/\ell$. \square

Maintenant on introduit le polygone de Newton des points (k, r_k) , c'est-à-dire l'enveloppe convexe inférieure de l'ensemble du plan qu'ils forment.



Nous allons montrer que les abscisses des points de rupture $1 = i_1 < \dots < i_k = \ell$ vérifient l'hypothèse de la Proposition 2. D'après la Proposition 3, on a

$$\frac{1}{2} \sum_f (e_{i_f} + e_{i_{f+1}})(r_{i_{f+1}} - r_{i_f}) > \frac{d}{\ell} \left(\sum_f \frac{i_f + i_{f+1}}{2} (r_{i_{f+1}} - r_{i_f}) \right).$$

La quantité entre parenthèses \mathcal{A} n'est rien d'autre que l'aire algébrique entre le polygone de Newton et l'axe des abscisses. Cette aire est inchangée si on remplace chaque (k, r_k) par son projeté vertical (k, ρ_k) sur le polygone. Pour la minorer, on peut donc remplacer r_k par ρ_k et faire $i_k = k$. On trouve :

$$\frac{d}{\ell} \mathcal{A} = \frac{d}{\ell} \sum_f \frac{2f + 1}{2} (\rho_{f+1} - \rho_f) = \frac{d}{\ell} \left(\frac{\rho_\ell + \rho_0}{2} + \ell \rho_\ell - \sum \rho_k \right).$$

Or $\frac{\rho_\ell + \rho_0}{2} \geq \frac{1}{\ell} \sum \rho_k$ car la fonction $k \mapsto \rho_k$ est convexe, et $\sum \rho_k \leq \sum r_k = 0$ car le sous-groupe à un paramètre λ est à valeurs dans SL_{n+1} . On minore donc par :

$$\frac{d}{\ell} \left(\ell \rho_\ell - \frac{\ell - 1}{\ell} \sum \rho_k \right) \geq \frac{d}{\ell} \ell \rho_\ell = d \rho_\ell = dr_\ell,$$

comme requis dans la Proposition 2. \square