Groupe de travail sur la

Théorie géométrique des invariants

Matthieu Romagny, 5 septembre 2013

1 Le problème des quotients en géométrie algébrique

Travaillons avec des variétés sur un corps algébriquement clos de base, vues comme spectres maximaux i.e. à points fermés (on pourrait aussi raisonner avec des schémas de type fini). Soit G un groupe algébrique agissant sur une variété algébrique X. S'il existe un morphisme de quotient $\pi : X \to Y$ $(= X/G)$ dans lequel Y est ensemblistement un espace des orbites, au sens où

(P1) π est surjectif et ses fibres sont des orbites de G,

alors pour tout point $y = \pi(x) \in Y$, la fibre $\pi^{-1}(y)$, i.e. l'orbite de x dans X, est fermée.

Or pour son action naturelle sur la droite affine $X = \mathbb{C}$, le groupe multiplicatif $G = \mathbb{C}^\times$ a deux orbites ; l'une composée par l'origine 0 est fermée, et l'autre $X \smallsetminus \{0\}$ est ouverte. On est donc embarrassé pour construire un quotient. Une autre approche serait de se dire que si un espace quotient Y existe, il est naturel de penser que

(P2) les fonctions locales sur Y sont les fonctions G-invariantes sur X.

Avec cette recette, on ne trouve que les fonctions constantes, ce qui ne laisse d'autre choix que $Y = pt$, le point. Ce problème est typique des situations que l'on rencontre lorsqu'on veut construire des quotients en Géométrie Algébrique.

Clairement, si on restreint l'action de $G = \mathbb{C}^\times$ à l'ouvert $U = X \smallsetminus \{0\}$, l'orbite ouverte devient fermée (dans elle-même...) et le morphisme $\pi : U \to pt$ possède les propriétés d'un quotient telles qu'on les a rêvées ci-dessus. En Théorie Géométrique des Invariants, ou théorie GIT, c'est une idée fondamentale que de chercher à identifier des ouverts $U \subset X$ les plus gros possibles, stables sous G et ayant un bon quotient. Une question difficile que pose immédiatement cette approche est de savoir caractériser l'appartenance d'un point $x \in X$ donné à un de ces bons ouverts U. L'un des résultats fondamentaux de GIT est d'apporter des réponses à cette question. Un point qu'il est utile de souligner est que la discussion préliminaire des propriétés qu'on attend d'un quotient, comme (P1) et (P2), est cruciale.

2 La construction d'espaces de modules

Une application essentielle de GIT est de construire des espaces de modules pour certains types d'objets géométriques que l'on souhaite classifier. Précisons qu'un *espace de modules* pour les objets en question est une variété V (dans le même sens que précédemment) dont les points (fermés) sont en bijection avec les classes d'isomorphisme d'objets ;

pour obtenir une définition qui assure l'unicité de V et qui fonctionne bien en pratique, il faut aussi demander qu'à chaque famille d'objets paramétrés par une variété de base S soit associée fonctoriellement un morphisme $S \to V$; l'image d'un point $s \in S$ par ce morphisme est l'objet de la famille dont le paramètre est s, pris à isomorphisme près. On peut prendre l'exemple des courbes projectives lisses connexes d'un genre g fixé ; l'espace de modules $\mathscr{M}_g$ a pour points les courbes à isomorphisme près, les familles sont les morphismes $\mathscr{C} \to S$ projectifs et plats dont les fibres $\mathscr{C}_s$ sont des courbes au sens précédent.

Il n'est pas évident de savoir comment construire une telle variété $\mathscr{M}_g$. On peut le faire en se ramenant à un problème de quotient, comme je vais décrire brièvement ; on peut ensuite utiliser la théorie GIT pour cela. Une stratégie identique fonctionne par ailleurs pour de nombreuses constructions d'espaces de modules en Géométrie Algébrique. Le point de départ est que, alors qu'il est difficile de construire un espace de modules pour des objets *abstraits*, c'est plus facile de le faire pour des objets *plongés* dans un espace fixé. À titre d'exemple, on peut se rappeler de la construction familière de l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$, qui n'est autre que l'espace de modules des droites linéaires d'un espace vectoriel E fixé. Un peu plus généralement, on sait que la grassmannienne $\mathbb{G}_k(E)$ est l'espace de modules des k-plans linéaires de E, ou de manière équivalente l'espace de modules des $(k-1)$-plans projectifs de $\mathbb{P}(E)$. Encore plus généralement, un résultat beaucoup moins élémentaire de Grothendieck montre que l'espace des modules des sous-variétés fermées d'un espace projectif $\mathbb{P}^N$, avec des invariants fixés (en pratique : le polynôme de Hilbert P) existe et est un schéma projectif, appelé le *schéma de Hilbert*.

S'il s'agit de construire $\mathscr{M}_g$, on s'approche du but, car il est possible de plonger toute courbe C de genre g dans un espace projectif $\mathbb{P}^n$ uniforme (c'est-à-dire que sa dimension n ne dépend que de g). Ceci est la traduction directe du fait que la puissance troisième $(\Omega^1_C)^{\otimes 3}$ du faisceau inversible des 1-formes différentielles de Kähler, est très ample : en choisissant une base $s_0, \ldots, s_n$ de l'espace vectoriel $E = H^0(C, (\Omega^1_C)^{\otimes 3})$, dont la dimension $n+1 = 5g-5$ se calcule avec le théorème de Riemann-Roch, on construit par la formule $x \mapsto (s_0(x) : \ldots : s_n(x))$ une immersion fermée $C \hookrightarrow \mathbb{P}(E) \simeq \mathbb{P}^n$. En fait, avec un peu de travail on montre même que pour une famille $\mathscr{C} \to S$ paramétrée par S, il existe Zariski-localement sur S un plongement de $\mathscr{C}$ dans l'espace projectif relatif $\mathbb{P}^n_S$.

Repartons du schéma de Hilbert : Grothendieck nous apprend qu'il existe un schéma projectif H qui est l'espace de modules des sous-variétés fermées de $\mathbb{P}^n$ qui sont des courbes lisses, connexes, de genre g, qui engendrent $\mathbb{P}^n$ (i.e. ne sont pas incluses dans un projectif plus petit). Par ailleurs, il est clair que le groupe d'automorphismes $G = \mathrm{PGL}_{5g-6}$ de l'espace projectif ambiant transporte une courbe $C \subset \mathbb{P}^n$ sur une courbe isomorphe, et la propriété d'engendrement fait que deux courbes de $\mathbb{P}^n$ qui sont isomorphes le sont par un élément de G. Tout ces arguments mis bout à bout montrent que l'espace de modules $\mathscr{M}_g$ des courbes de genre g est l'espace des orbites de H pour l'action de G. Il peut donc se construire par la théorie GIT, pour peu que celle-ci fonctionne bien pour dans cas particulier.