STABILITÉ 1

CHRISTOPHE RITZENTHALER

Résumé. Ceci est tiré de Dolgachev "Lectures on Invariant theory" chapitre VIII, avec quelques commentaires additionnels.

Dans la suite G est un groupe linéairement réductif agissant sur une variété algébrique irréductible X définie sur un corps k algébriquement clos. Le but est d'obtenir une structure quotient sur X/G en recollant des ouverts affines. Cela n'est possible en général que sur un ouvert de X.

1. Définitions et premières propriétés

Définition 1.1. Soit L un fibré en droite G-linéarisé sur X et $x \in X$.
- x est dit *semi-stable* (par rapport à L) s'il existe $m > 0$ et $s \in \Gamma(X, L^m)^G$ tels que $X_s = \{y \in X,\ s(y) \neq 0\}$ est affine et contient x. On note l'ensemble des tels x, $X^{ss}(L)$.
- x est dit *stable* s'il existe un X_s comme ci-dessus et de plus G_x est fini et toutes les orbites de G dans X_s sont fermées. On note l'ensemble des tels x, $X^s(L)$.
- x est dit *instable* s'il n'est pas semi-stable.

Remarque 1.2. La terminologie a un peu changé par rapport à Mumford. La notion de pré-stabilité a disparu et la notion de stabilité chez Dolgachev inclus l'hypothèse G_x fini, ce qui correspond au concept de stabilité propre chez Mumford. La semi-stabilité n'a pas changé.

Prenons un cas explicite. Supposons X une variété projective plongée de manière équivariante dans $\mathbb{P}(V)$ et $L = O_{\mathbb{P}(V)}(1)$. On a un isomorphisme de $k[G]$-module entre $\Gamma(X, L^m)$ et $\mathrm{Pol}_m(V)/I_m$ où $\mathrm{Pol}_m(V)$ est le k-espace vectoriel des polynômes homogènes de degré m sur V et I_m le sous-espace des polynômes qui s'annulent sur X. Ainsi, toute section $s \in \Gamma(X, L^m)^G$ peut-être représentée par un polynôme F_s G-invariant modulo I_m. En particulier F_s est constant sur une orbite de $v \in V$, pour tout représentant v d'un élément $x \in X$ et $s(x) \neq 0$ si et seulement si $F_s(v) \neq 0$. On voit ainsi que les points instables sont l'image dans $\mathbb{P}(V)$ de

$$N = \{v \in V \text{ tels que } F(v) = 0\ \forall F \in \bigoplus_{m>0} \mathrm{Pol}_m(V)^G\}$$

qu'on appelle le *nullcone*. On voit aussi facilement que x est instable si et seulement si $0 \in \overline{G \cdot v}$. En effet si $0 \in \overline{G \cdot v}$ alors pour tout polynôme F non constant G-invariant, $F(v) = F(G \cdot v) = F(0) = 0$. Inversement puisque G est linéairement réductif, il existe un polynôme P, G-invariant, séparant les orbites fermées, i.e.

Date: 1 novembre 2014.

$P(\overline{G\cdot v}) \neq 0$ et $P(0)=0$. Il existe alors une composante homogène P_m de P de degré $m>0$ qui est telle que $P_m(v)\neq 0$.

Exemple 1.3. Les ouverts $X^s(L) \subset X^{ss}(L)$ peuvent être vides. C'est le cas si $X = \mathbb{P}^n$ et $G = \mathrm{SL}_n(1)$ et $L = O_{\mathbb{P}^n}(1)$. En effet d'après ce qui précède $\Gamma(X, O_{\mathbb{P}^n}(1))^G = \mathrm{Pol}_m(k^{m+1})^G = \{0\}$ donc $X^{ss}(L)=\emptyset$.

Proposition 1.4. *Si L est ample et X projective alors X_s est toujours affine.*

Démonstration. En effet puisque $X_{s^n} = X_s$ pour tout $n \geq 1$ on peut supposer L très ample quitte à le remplacer par L^n et $s \in \Gamma(X,L)^G$. Soit $f : X \to \mathbb{P}^n$ le plongement fermé (car X est projective donc propre) correspondant à L. La section s correspond alors à une section hyperplane et X_s est donc l'intersection de $f(X)$ avec un ouvert affine. Comme $f(X)$ est fermé et que l'intersection d'un affine et d'un fermé est affine, on a le résultat. □

Proposition 1.5. *La restriction de L à $X^{ss}(L)$ est ample.*

Démonstration. Cela découle d'un résultat énoncé pendant la démonstration de [Har77, p.155] : L est ample sur X si et seulement si il existe un recouvrement de X formé d'ouverts affines de la forme X_s avec s une section globale d'une puissance de L. C'est exactement notre cas de figure. □

Proposition 1.6. *Supposons L ample. Soit $x \in X^{ss}(L)$ tel que $G\cdot x$ soit fermée et G_x fini. Alors $x \in X^s(L)$.*

Démonstration. Soit $x \in X_s$ et notons $Z = \{y \in X_s,\ \dim G_y > 0\}$. C'est un fermé de X_s (théorème de la dimension des fibres) qui ne rencontre pas $G\cdot x$. Comme G est linéairement réductif et X_s affine, il existe $\phi \in O(X_s)^G$ telle que $\phi(G\cdot x)\neq 0$ et $\phi(Z)=0$. La propriété d'extension des sections [Har77, II.5.14] montre qu'il existe $r>0$ tel que $\phi s^r = s' \in \Gamma(X, L^r)$. Comme X est irréductible, s' est G invariante (car elle l'est sur un ouvert dense). Donc $x \in X_{s'} \subset X_s$ et $X_{s'}$ est affine car L est ample. Tous les points de $X_{s'}$ ont un stabilisateur de dimension nulle. Cela implique (en raison de la semi-continuité supérieure des dimensions et le fait que $\dim G_x + \dim G\cdot x$ est constante) que les orbites de tous les points de $X_{s'}$ sont fermées dans $X_{s'}$. Donc x est stable. □

2. Théorème principal et corollaire

Théorème 2.1. *(1) Il existe un bon quotient catégorique $\pi : X^{ss}(L) \to X^{ss}(L)/G$.*

(2) Il existe un fibré ample M sur $X^{ss}(L)/G$ tel que $\pi^*(M) = L^n_{|X^{ss}(L)}$ pour un $n \geq 0$. En particulier $X^{ss}(L)/G$ est quasi-projectif (i.e. un ouvert dans une variété projective).

(3) il existe un ouvert U de $X^{ss}(L)/G$ tel que $X^s(L) = \pi^{-1}(U)$ et $\pi_{|X^s(L)}$ est un quotient géométrique.

Démonstration. **Preuve de (1)**. Puisque tout ouvert de X est quasi-compact, il existe $r>0$ et des sections $s_1,\dots,s_r$ G-invariantes d'un L^N tel que $X^{ss}(L)$ est recouvert par les $U_i := X_{s_i}$. Chaque U_i étant affine, on a un bon quotient catégorique $\pi_i : U_i \to Y_i := U_i/G$ tel que $O(Y_i) = O(U_i)^G$.
Soient $1 \leq i,j \leq r$ deux indices et considérons la fonction régulière $s_i/s_j \in O(U_j)^G$

et ϕ_{ji} la fonction régulière induite sur Y_j. Soit $D_{ij} := D(\phi_{ij}) \subset Y_j$ l'ouvert principal alors
$$\pi_j^{-1}(D_{ij}) = \pi_i^{-1}(D_{ji}) = U_i \cap U_j.$$
Ainsi $U_i \cap U_j \to D_{ij}$ et $U_i \cap U_j \to D_{ji}$ sont deux quotients catégoriques (car ce sont des ouverts dans un bon quotient catégorique). Par unicité du quotient catégorique, il existe donc un unique isomorphisme $\alpha_{ji} : D_{ij} \to D_{ji}$. On va montrer que les α_{ji} se recollent. Il faut montrer que

- $\alpha_{ii} = Id$.
- $\alpha_{ji}(D_{ij} \cap D_{kj}) \subset D_{ki}$. En effet, on a
$$\begin{tikzcd} & U_i \cap U_j \cap U_k \arrow[dl, "\pi_j"'] \arrow[dr, "\pi_i"] & \\ D_{ij} \cap D_{kj} & & D_{ki} \cap D_{ji} \end{tikzcd}$$
Par unicité du quotient catégorique et de l'isomorphisme, on a bien le résultat.
- $(\alpha_{ik} \circ \alpha_{ji})|_{D_{ij} \cap D_{kj}} = \alpha_{jk}|D_{ij} \cap D_{kj}$. On applique encore les unicités au diagramme suivant
$$\begin{tikzcd} & U_i \cap U_j \cap U_k \arrow[dl, "\pi_j"'] \arrow[d, "\pi_i"] \arrow[dr, "\pi_k"] & \\ D_{ij} \cap D_{kj} \arrow[r, "\alpha_{ji}"'] \arrow[rr, bend right, "\alpha_{jk}"'] & D_{ji} \cap D_{ki} \arrow[r, "\alpha_{ik}"'] & D_{jk} \cap D_{ik} \end{tikzcd}$$

Par recollement, on a donc définit un morphisme $\pi : X^{ss}(L) \to Y$. On peut vérifier que Y est un bon quotient catégorique car les propriétés se vérifient localement.

Preuve de (2). Puisque la restriction L' de L à $X^{ss}(L)$ est ample, on peut supposer que L' est très ample (quitte à remplacer par une puissance). Soit $f : X^{ss}(L) \to \mathbb{P}^n$ le plongement correspondant et $s_i = f^*(h_i)$ où h_i est une section hyperplane. Alors $U_i = f^{-1}(V_i)$ où V_i est le complémentaire de $h_i = 0$ et est donc affine. Ceci montre que $L'_{|U_i} = (f_{U_i})^*(O(\mathbb{P}^n(1))|_{V_i})$. Ce dernier fibré sur un ouvert affine est donc isomorphe à un fibré trivial. Les $\{(U_i, s_i)\}$ définissent une trivialisation de L'. On peut regarder les $(s_i/s_j)_{|U_i \cap U_j}$ comme des fonctions de transition g_{ij} de L'. On considère alors les $h_{ji} = \phi_{ji|Y_j \cap Y_i}$ comme des fonctions de transitions pour définir un fibré L sur Y. On a par construction $\pi^*(M) = L'$.
Montrons que M est ample en utilisant le même critère que pour la proposition 1.5 avec le recouvrement affine de Y par les Y_i. Pour tout $1 \leq i, j \leq r$, on définit $t_{i|Y_j} = \phi_{ji}$. Puisque
$$\phi_{ij_2} = \phi_{ij_1}\phi_{j_1j_2} = \phi_{ij_1}h_{j_1j_2}$$
on a que les $t_{i|Y_{j_1} \cap Y_{j_2}}$ diffèrent par une fonction de transition $h_{j_2j_1}$ donc définissent des sections globales t_i de M. On a ainsi que $Y_i = Y_{t_i}$ et Y_i étant affine, on a que M est ample.

Preuve de (3). Pour montrer que $X^s(L) \to U$ est un quotient géométrique et comme on sait qu'il est un bon quotient catégorique, il suffit de montrer que les fibres $\pi^{-1} \circ \pi(x)$ pour $x \in X^s(L)$ sont les orbites $G \cdot x$. Soit x un point stable et s une section telle que $x \in X_s$ avec $G \cdot y$ fermé pour tout $y \in X_s$. Soit maintenant $x' \in X$ tel que $\pi(x') = \pi(x)$. La section s étant G-invariante, elle induit comme précédemment une fonction sur X_s/G qui ne s'annule pas en $\pi(x) = \pi(x')$. Donc $s(x') \neq 0$ et $x' \in X_s$. En particulier l'orbite de y est fermée. Si $G \cdot x \cap G \cdot x' = \emptyset$ alors on pourrait séparer les orbites car G est linéairement réductif. Or ceci n'est pas possible puisque $\pi(x) = \pi(x')$. Ainsi x' est dans l'orbite de x. $\square$

Proposition 2.2. *Si X est projective et L ample, définissons $R = \bigoplus_{m \geq 0} \Gamma(X, L^n)$. Alors $X^{ss}(L)/G \simeq$ Proj(R^G). En particulier c'est une variété projective.*

Rappelons que si A est une k-algèbre graduée avec $A_0 = k$, on peut considérer $X^* = \mathrm{Spec}(A) \setminus I$ où I est l'idéal $\sum_{i>0} A_i$. Le groupe multiplicatif agit sur X^* et on peut montrer que le quotient est une variété projective notée $\mathrm{Proj}(A)$.

Démonstration. Quitte à remplacer L par une puissance, on peut supposer que X est plongée par L et que $\Gamma(X, L)$ est engendré par des sections G-invariantes $s_1, \ldots, s_n$ (car $\Gamma(X, L)^G$ est finiment engendrée). On a vu plus haut que les points instables sont exactement les $x \in X$ appartenant au nullcone, i.e. $(s_1(x), \ldots, s_n(x)) = (0, \ldots, 0)$. $\square$

Exemple 2.3. Si G est fini alors $X^{ss}(L) = X^s(L)$ car dans ce cas G_x est fini pour tout x et en reprenant la démonstration de la proposition 1.6, on a le résultat. De plus si L est ample alors $X^{ss}(L) = X$. En effet après avoir plongé X dans un $\mathbb{P}^n$ pour tout $x \in X$, on considère un hyperplan h ne rencontrant pas $G \cdot x$ (qui est fini). On considère alors la section $s = \prod_{g \in G} g^*(h)$ et $x \in X_s$.

Exemple 2.4. Soit $G = SL_n$ agissant par conjugaison sur M_n (les matrices carrées de taille n) et $X = \mathbb{P}(M_n)$. On sait que le quotient M_n/G est $\mathbb{A}^n = \{(a_0, \ldots, a_{n-1})\}$ où $\chi_M = \sum a_i X^i$ est le polynôme caractéristique de M. Alors M est instable si et seulement si $a_0(M) = \ldots = a_{n-1}(M) = 0$, i.e. M est nilpotente. Le quotient de $M_n \setminus \{\text{mat. nilpotentes}\}$ est donc $\mathbb{A}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}/\sim$ où $(a_0 : \ldots : a_{n-1}) \sim (\lambda^n a_0 : \ldots : \lambda a_{n-1})$. Pour le quotient géométrique, il faut une orbite par fibre. Cela n'est possible que si M est diagonalisable donc si U est l'ouvert de M_n des matrices diagonalisables, on a que $X^s(L) = \mathbb{P}(U \setminus \{0\})$.

Références

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.