QUOTIENT D'UNE VARIÉTÉ AFFINE PAR UN GROUPE LINÉAIREMENT RÉDUCTIF

par

David

Le but de l'exposé est de montrer que le quotient catégorique d'une variété affine par un groupe algébrique linéairement réductif (c'est-à-dire un groupe algébrique affine dont toutes les représentations rationnelles de dimension finie sont complètement réductibles, *cf.* la section 2 pour plus de détails) existe toujours, est une variété affine et a en outre de bonnes propriétés (*cf.* la définition 1.6). Le corps de base k est supposé algébriquement clos, mais cette hypothèse n'est pas utilisée dans la très grande majorité des arguments. En fait on suit d'assez près le traitement de Mumford, plus particulièrement [**MFK94**, §1.1 et 1.2], où le corps est quelconque, et où est montrée plus généralement, avec les mêmes arguments, l'existence du quotient catégorique d'un schéma affine par un groupe algébrique linéairement réductif. Pour certaines des propriétés des groupes linéairement réductifs vis-à-vis des opérateurs de Reynolds (notamment la proposition 2.5), propriétés traitées assez « rapidement » dans [**MFK94**], une référence est [**DK02**, chapitre 2] (merci à Charles Savel de me l'avoir indiquée).

1. Quotient catégorique : critère d'existence

Soit X une k-variété algébrique munie d'une action algébrique d'un k-groupe algébrique affine G. Soit $\pi : X \to Y$ un quotient catégorique de X par G. Alors par la propriété universelle π^* induit $\Gamma(Y) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X)^G$.

Lemme 1.1. — *Soit $\pi : X \to Y$ un morphisme G-invariant tel que π^* induit $\Gamma(Y) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X)^G$. Alors pour toute variété affine Z et tout morphisme $\varphi : X \to Z$ G-invariant il existe un unique morphisme $\psi : Y \to Z$ tel que $\psi\pi = \varphi$*

Démonstration. — Rappelons que pour W variété quelconque et Z variété affine,

$$\mathrm{Hom}_{k-\text{variétés}}(W, Z) = \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(\Gamma(Z), \Gamma(W))$$

Ainsi le lemme se traduit algébriquement de la façon suivante : tout morphisme de k-algèbres $\varphi^* : A \to \Gamma(X)$ tel que $\varphi^*(A) \subset \Gamma(X)^G$ se factorise uniquement par l'inclusion $\Gamma(X)^G \hookrightarrow \Gamma(X)$. Ce qui est clair ! □

Remarque 1.2. — Supposons X affine et $\Gamma(X)^G$ de type fini. Soit $Y \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(\Gamma(X)^G, k)$ la k-variété algébrique affine telle que $\Gamma(Y) = \Gamma(X)^G$. Le lemme dit en particulier que $\pi : X \to Y$ est un quotient catégorique *dans la catégorie des k-variétés affines.*

Proposition 1.3. — *Soit $\pi : X \to Y$ un morphisme G-invariant tel que :*

1. *pour tout ouvert $U \subset Y$, π^* induit $\Gamma(U) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\pi^{-1}(U))^G$;*
2. *si $W \subset X$ est un fermé G-stable, $\pi(W)$ est fermé ;*
3. *si $(W_i)_{i \in I}$ est une famille de fermés G-stables, $\pi(\bigcap\limits_{i\in I} W_i) = \bigcap\limits_{i \in I} \pi(W_i)$.*

Alors (Y, π) est un quotient catégorique. En outre $U \subset Y$ est ouvert ssi sa préimage l'est.

Remarque 1.4. — Sous les mêmes hypothèses, (Y, π) est un quotient géométrique ssi les fibres de Y sont les orbites de G (*cf.* l'exposé de Serge)

Remarque 1.5. — Pour que le premier point soit vérifié, il suffit qu'il le soit pour tout élément d'une base d'ouvert $\{U_i\}$ de Y, par exemple pour tout ouvert affine, ou pour tout ouvert principal si Y est affine.

Démonstration. — Par 1, π est dominant. Par 2, π est surjectif.

Soit $\varphi : X \to Z$ un morphisme G-invariant, Z variété quelconque. Il faut montrer qu'il existe un unique morphisme $\psi : Y \to Z$ tel que $\psi\pi = \varphi$ Soit $\{Z_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert affine de Z ; *si* on peut trouver un recouvrement ouvert (non nécessairement affine) $\{Y_i\}_{i\in I}$ de Y tel que $\pi^{-1}(Y_i) \subset \varphi^{-1}(Z_i)$, on a terminé par le lemme précédent et 2 : il existe alors en effet un unique morphisme $\psi_i : Y_i \to Z$ tel que $\psi_i \pi = \varphi$ sur $\pi^{-1}(U_i)$; par unicité, les ψ_i se recollent sur les intersections.

Exhibons un tel recouvrement ouvert $\{Y_i\}_{i\in I}$. Posons $Y_i = \pi(X \setminus \varphi^{-1}(Z_i))$; par 2 et surjectivité c'est un ouvert de Y. On a par 3

$$\cup Y_i = Y \setminus \cap Y_i = Y \setminus \pi(\cap X \setminus \varphi^{-1}(Z_i)) = Y$$

Enfin si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert, $U = Y \setminus \pi(X \setminus \pi^{-1}(U))$ est ouvert. □

Définition 1.6. — Un quotient catégorique $\pi : X \to Y$ est dit *bon* s'il vérifie les hypothèses 1, 2, et 3 de la proposition ci-dessous.

2. Opérateur de Reynolds, groupes linéairement réductifs

2.1. Structure de G-module rationnel. — On considère un k-groupe algébrique affine agissant sur une variété algébrique affine X. La donnée de cette action correspond à la donnée d'un morphisme $\rho : G \times X \to X$ vérifiant les axiomes usuelles pour une action de groupe.

Dualement, au niveau des algèbres de fonctions, ρ correspond à un morphisme de k-algèbres

$$\rho^* : \Gamma(X) \to \Gamma(G \times X) \xrightarrow{\sim} \Gamma(G) \otimes_k \Gamma(X)$$

vérifiant les axiomes duaux

$$(\mu^* \otimes \mathrm{Id})\rho^* = (\mathrm{Id} \otimes \rho^*)\rho^* \tag{2.1.1}$$

$$(e_G \otimes \mathrm{Id})\rho^* = \mathrm{Id} \tag{2.1.2}$$

Ici $\mu : G \times G \to G$ est le morphisme définissant la loi de groupe de G et e_G est l'élément unité de G, vu comme élément de $\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(\Gamma(G), k)$.

Plus généralement, on définit une structure de G-module rationnel [1] sur un k-espace vectoriel V comme étant la donnée d'une application k-linéaire

$$\rho^* : V \to \Gamma(G) \otimes V$$

vérifiant (2.1.1) et (2.1.2).

Étant donné un tel ρ^*, on retrouve une application $\rho : G \times V \to V$ vérifiant les axiomes usuels d'une action de groupe en posant

$$\rho(g, v) = (g \otimes \mathrm{Id})\rho^*(v)$$

Encore une fois, on identifie ici un élément g de G à un élément de $\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(\Gamma(G), k)$. Si V est de dimension finie, cette action est algébrique, c'est-à-dire que le morphisme de groupes $G \to \mathrm{GL}(V)$ qu'elle induit est un morphisme de variétés.

Définition 2.1. — Soit (V, ρ^*) un G-module rationnel On pose

$$V^G = \{v \in V, \quad \rho^*(v) = 1 \otimes v\}.$$

Si $W \subset V$, on dit que W est G-stable si $\rho^*(W) \subset \Gamma(G) \otimes W$. $(W, \rho^*_{|W})$ est alors un G-module rationnel.

Le dual $V^\vee$ de V porte une structure naturelle de G-module rationnel définie par

$$(\rho^*)^\vee(\varphi) = \iota^*(\mathrm{Id} \otimes \varphi)\rho^* \in \mathrm{Hom}(V, \Gamma(G)) = \Gamma(G) \otimes V^\vee$$

Lemme 2.2. — *Soit (V, ρ^*) un G-module rationnel et $v \in V$. Alors il existe un sous-espace $W \subset V$ qui est G-stable, de dimension finie et qui contient v.*

Démonstration. — Soit

$$W = \{(\varphi \otimes \mathrm{Id})\rho^*(v), \quad \varphi \in \Gamma(G)^\vee\}.$$

W est un sous-espace vectoriel de V (immédiat) qui contient v (prendre $\varphi = e_G$ et appliquer (2.1.2))

Par ailleurs si on écrit

$$\rho^*(v) = \sum_{i \in I} \gamma_i \otimes v_i \tag{2.1.3}$$

avec I fini on a

$$W = \{\sum_{i \in I} \varphi(\gamma_i)\, v_i, \quad \varphi \in \Gamma(G)^\vee\}$$

ce qui montre que W est de dimension finie.

---

1. En toute rigueur, on devrait parler de structure de $\Gamma(G)$-comodule ; dans la suite en fait, même si cela n'est volontairement pas traduit au niveau des notations, seul $\Gamma(G)$ intervient ; ceci a notamment un intérêt dans des contextes où la donnée de G (plus précisément de $\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(\Gamma(G), k)$) ne détermine pas $\Gamma(G)$: k non algébriquement clos, mais aussi k de caractéristique non nulle et $\Gamma(G)$ non réduit

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \rho^*(\varphi\otimes \mathrm{Id})\rho^*(v) &= (\varphi\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id})(\mathrm{Id}\otimes\rho^*)\rho^*(v)\\ \text{(d'après (2.1.1))}\quad &= (\varphi\otimes\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id})(\mu^*\otimes\mathrm{Id})\rho^*(v)\\ &= [([\varphi\otimes\mathrm{Id}]\mu^*)\otimes\mathrm{Id}]\rho^*(v). \end{aligned}$$

Si on choisit une base $\{\nu_j\}_{j\in J}$ de $\Gamma(G)$, il existe une famille $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ d'éléments de $\Gamma(G)^\vee$ tel qu'on puisse écrire pour tout $\gamma\in\Gamma(G)$,

$$([\varphi\otimes\mathrm{Id}]\mu^*)(\gamma)=\sum_{j\in J}\varphi_j(\gamma)\nu_j$$

On a ainsi d'après (2.1.3)

$$\rho^*(\varphi\otimes\mathrm{Id})\rho^*(v)=\sum_{j\in J}\nu_j\otimes(\sum_{i\in I}\varphi_j(\gamma_i)\,v_i)\in\Gamma(G)\otimes W.$$

□

Définition 2.3. — Soit (V,ρ^*) un G-module rationnel. Un *opérateur de Reynolds* $\mathcal{R}$ pour (V,ρ^*) est un projecteur de V d'image V^G et vérifiant

$$\rho^*\mathcal{R}=(\mathrm{Id}\otimes\mathcal{R})\rho^*.$$

Remarque 2.4. — Un opérateur de Reynolds existe ssi V^G possède un supplémentaire G-stable.

Proposition 2.5. — *Soit G un k-groupe algérique affine.*

1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
   - *(a) pour tout G-module rationnel V, il existe un unique opérateur de Reynolds $\mathcal{R}_V$;*
   - *(b) pour tout G-module rationnel V de dimension finie, il existe un opérateur de Reynolds $\mathcal{R}_V$;*
   - *(c) pour tout G-module rationnel de dimension finie et tout $v\in V^G\setminus\{0\}$, il existe $\varphi\in(V^\vee)^G$ tel que $\varphi(v)\neq 0$;*
   - *(d) pour tout G-modules rationnel de dimension finie V et tout sous-G-module W de V, W admet un supplémentaire G-stable.*
2. *Si G vérifie l'une des propriétés équivalentes de l'énoncé précédent, $V\mapsto\mathcal{R}_V$ est fonctorielle : si $\varphi: V\to W$ est un morphisme de G-module, alors $\varphi.\mathcal{R}_V=\mathcal{R}_W.\varphi$.*

Définition 2.6. — Si l'une des propriétés du 1. de l'énoncé précédent est vérifiée, on dit que le k-groupe algébrique affine G est linéairement réductif.

Exemple 2.7. — En caractéristiques 0 : les groupes finis, $\mathbf{G}_m^n$, GL_n, SL_n, SO_n, $\mathrm{Sp}_{2n}\ldots$

En caractéristique p : les groupes finis de cardinal premier à p, $\mathbf{G}_m^n$ et ce sont les seuls à extension près (théorème de Nagata, *cf.* [**Nag62, Koh11**] : en caractéristique non nulle, G est linéairement réductif si et seulement si sa composante neutre est isomorphe à un $\mathbf{G}_m^n$ et p ne divise pas le nombre de composantes connexes de G).

Contre-exemple en toute caractéristique : $\mathbf{G}_a$, plus généralement les groupes unipotents.

Remarque 2.8. — Il est facile de voir qu'un groupe fini de cardinal premier à la caractèristique est linéairement réductif : pour tout sous-espace invariant W, en moyennant un projecteur de noyau W sur tous les éléments de G, on obtient un projecteur G-équivariant de noyau W ; si $k = \mathbf{C}$, l'« astuce unitaire de Weyl » permet de généraliser ce procédé à GL_n, SL_n... en moyennant sur un sous-groupe compact convenable (*cf.* [**Dol03**, §3.2]).

Remarque 2.9. — Il est également aisé de voir que si G est un tore, c'est-à-dire G est isomorphe à un produit de copies de $\mathbf{G}_m$, alors G est linéairement réductif. Pour rigoler un peu, écrivons le dans le langage des comodules. Que G soit un tore peut s'exprimer ainsi : il existe un groupe abélien libre de type fini M tel que $\Gamma(G)$ est isomorphe à $k[M]$. La comultiplication $k[M] \to k[M] \otimes k[M] \xrightarrow{\sim} k[M \oplus M]$ est issue du morphisme qui à $m \in M$ associe (m, m) et la counité $k[M] \xrightarrow{\sim} \oplus_{m \in M} k \to k$ est le morphisme somme. Une structure de G-module sur un espace vectoriel V correspond à la donnée d'une application linéaire

$$\rho^* : V \to \Gamma(G) \otimes V \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{m \in M} V_m$$

vérifiant (2.1.1) et (2.1.2). Pour $v \in V$, notons $\rho^*(v) = \sum_{m \in M} v_m$. Compte tenu de ce qui précède, la première condition se traduit ainsi : pour tout $m \in M$, $\rho(v_m) \in V_m$ et $\rho(v_m) = v_m$. La deuxième condition dit que $\sum_{m \in M} v_m = v$.

Posons, pour $m \in M$, $V^m = \{v \in V, \quad \rho(v) \in V_m\}$. On vérifie alors qu'on a $V = \bigoplus_{m \in M} V^m$ et que si $W \subset V$ est G-stable, le sous-espace

$$W' = \bigoplus_{\substack{m \in M \\ W \cap V^m = 0}} V^m$$

est un supplémentaire G-stable de W.

Définition 2.10. — Un k-groupe algébrique affine [2] est dit *réductif* si son radical, c'est-à-dire son plus grand sous-groupe algébrique distingué résoluble connexe, est un tore (c'est-à-dire est isomorphe à un produit de copies de $\mathbf{G}_m$).

Remarque 2.11. — On montre (structure des groupes algébriques résolubles) qu'une définition équivalente est la suivante : le radical unipotent, c'est-à-dire le plus grand sous-groupe algébrique distingué unipotent, est trivial.

Remarque 2.12. — Tout groupe linéairement réductif est réductif. Soit en effet H le radical unipotent de G. Si V est un G-module simple, V^H est un sous module G-stable (car H est distingué) et non nul (car H est unipotent) donc $V^H = V$. Si G est linéairement réductif, ceci montre que H agit trivialement sur n'importe quel

2. en caractéristique non nulle, on suppose en outre que $\Gamma(G)$ est réduite

G-module de dimension finie. On conclut en considérant une représentation fidèle de G.

Remarque 2.13. — On montre, mais c'est un peu plus délicat, que réciproquement, en caractéristique nulle, réductif entraîne linéairement réductif ; *cf.* par exemple la partie II.6 des notes de cours de Milne intitulées *Algebraic Groups, Lie Groups, and their Arithmetic Subgroups*, disponibles sur son site web.

Exemple 2.14. — Soit k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Alors SL_2 (vu comme groupe algébrique sur k), bien que réductif, n'est pas linéairement réductif. Faisons en effet agir $\mathrm{SL}_2(k)$ sur $V = k[x,y]_p$ (polynômes homogènes de degré p). Alors le sous-espace $\mathrm{Vect}(x^p, y^p)$ est SL_2-invariant. Supposons qu'il admette un supplémentaire SL_2-stable W. Écrivons

$$x^{p-1}y = \alpha.x^p + \beta.y^p + w$$

avec $\alpha, \beta \in k$ et $w \in W$. Pour $u \in k$ on fait agir la matrice unipotente $M_u = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur l'égalité précédente.

$$x^{p-1}(y + u\,x) = \alpha.x^p + \beta.(y + u\,x)^p + \underbrace{M_u.w}_{\in W}$$

On obtient, pour tout $u \in k$,

$$\beta.u^p - u = 0$$

ce qui est impossible (rappelons que k est algébriquement clos). Ce contre-exemple, pour autant que je comprenne, est la clef de l'argument de Nagata : Nagata montre plus généralement qu'en caractéristique p la présence d'unipotents empêche le groupe d'être linéairement réductif, en se ramenant essentiellement au contre-exemple précédent.

Démonstration. — (de la proposition 2.5)

Clairement (a) implique (b), (b) équivaut à (c) et (d) implique (c).

Supposons (b). Établissons d'abord quelques conséquences de cette hypothèse.

Soit V un G-module rationnel de dimension finie. Soit V_0 un sous-espace G-stable tel que $V = V^G \oplus V_0$. Le morphisme

$$\begin{array}{rcl} V^G & \longrightarrow & ((V^\vee)^G)^\vee \\ v & \longmapsto & (\varphi \mapsto \varphi(v)) \end{array}$$

est injectif, donc $\dim(V^G) \leqslant \dim(V^\vee)^G$, et on obtient l'égalité en appliquant ce qui précède à $V = V^\vee$.

On a une suite exacte scindée de G-modules

$$0 \to V_0 \to V \to V/V_0 \to 0$$

en dualisant et en prenant les G-invariants on obtient

$$0 \to V_0^\perp \to (V^\vee)^G \to (V_0^\vee)^G \to 0.$$

où la première injection est l'inclusion naturelle. Or

$$\dim(V_0^\perp) = \dim(V^G) = \dim(V^\vee)^G$$

donc $V_0^\perp = (V^\vee)^G$ (en particulier V_0 est unique) et $(V_0^\vee)^G = \{0\}$.

Soit à présent $W \subset V$ un sous-G-module. Montrons que

$$W_0 = \mathrm{Ker}(\mathcal{R}_W) \subset V_0 = \mathrm{Ker}(\mathcal{R}_V)$$

Si tel n'est pas le cas, on peut trouver $\varphi \in (V^\vee)^G$ non identiquement nulle sur $\mathcal{R}_V(W_0)$ ainsi $\varphi \circ \mathcal{R}_V \in (W_0^\vee)^G \setminus \{0\}$, contradiction. En particulier $\mathcal{R}_V(W) \subset W$ et $(\mathcal{R}_V)_{|W} = \mathcal{R}_W$

Plus généralement si $\varphi : V \to W$ est un morphisme de G-module, alors $\varphi.\mathcal{R}_V = \mathcal{R}_W.\varphi$. En effet, si $w \in \varphi(V)$, $w \mapsto \phi(\mathcal{R}_V(v)$ où $\phi(v) = w$ est bien définie et est un Reynolds pour $\varphi(V)$, donc coïncide avec $\mathcal{R}_W$ restreint à $\varphi(V)$. En particulier si φ est surjective, V^G est envoyé surjectivement sur W^G.

Montrons à présent que (b) implique (a).

Si V est un G-module, on vérifie que

$$V_0 \overset{\text{déf}}{=} \bigcup_{\substack{W \subset V \\ W\ G\text{-stable} \\ \dim(W) < +\infty}} \mathrm{Ker}(\mathcal{R}_W) \tag{2.1.4}$$

est un supplémentaire G-stable de V^G. Par ailleurs si V_1 est un supplémentaire G-stable de V^G, nécessairement $V_1 \subset V_0$, donc $V_1 = V_0$.

Montrons que (b) implique (d). Soit $W \subset V$ un sous-G-module. On a une suite exacte, scindée en tant que suite d'espace vectoriels

$$0 \to W \to V \to V/W \to 0$$

d'où une suite exacte de G-modules

$$0 \to \mathrm{Hom}(V/W, W) \to \mathrm{Hom}(V/W, V) \to \mathrm{Hom}(V/W, V/W) \to 0.$$

En prenant les G-invariant et en utilisant ce qui précède, on obtient que

$$\mathrm{Hom}_G(V/W, V) \to \mathrm{Hom}_G(V/W, V/W)$$

est surjective. Donc $\mathrm{Id} \in \mathrm{Hom}(V/W, V/W)$ se relève en une section G-équivariante.

Montrons la fonctorialité du Reynolds dans le cas général. Si $W \subset V$,

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{R}_W) = \bigcup_{\substack{W' \subset W \\ \dim(W') < +\infty}} \mathrm{Ker}(\mathcal{R}_{W'})$$

est inclus dans $\mathrm{Ker}(\mathcal{R}_V)$ d'après (2.1.4). On en déduit aussitôt la fonctorialité générale de la même façons que dans le cas de la dimension finie. $\square$

Proposition 2.15. — *(identité de Reynolds)*

Soit A une k-algèbre et (A, ρ^*) une structure de G-module rationnel sur A. On suppose que ρ^* est un morphisme d'anneaux (on dit alors que ρ^* munit A d'une *structure de G-algèbre). Alors $\mathcal{R}_A$ est un morphisme de A^G-modules, en d'autres termes on a*

$$\forall x \in A, \quad \forall y \in A^G, \quad \mathcal{R}_A(x\,y) = y\,\mathcal{R}_A(x).$$

Démonstration. — Il suffit de montrer $A^G.A^G \subset A^G$ et $A^G\,\mathrm{Ker}(\mathcal{R}_A) \subset \mathrm{Ker}(\mathcal{R}_A)$. On a pour $a, b \in A^G$,

$$\rho^*(ab) = (1 \otimes a)(1 \otimes b) = 1 \otimes ab$$

ce qui montre la première inclusion.

Soit $y \in A^G$ et $x \in \mathrm{Ker}(\mathcal{R}_A)$. Soit $V \subset \mathrm{Ker}(\mathcal{R}_A)$ G-stable de dimension finie contenant x. Alors $y.V$ est un sous-G-module et $V \mapsto y.V$ est surjectif. En particulier $V^G = \{0\}$ se surjecte sur $(y.V)^G$ donc $(y.V)^G = \{0\}$. Ainsi on a $y.V \subset \mathrm{Ker}(\mathcal{R}_A)$. $\square$

Lemme 2.16. — *Soit A une G-algèbre, G linérairement réductif. Alors*

1. *Pour toute A^G-algèbre B, le morphisme $b \mapsto 1 \otimes b$ induit un isomorphisme $B \xrightarrow{\sim} (A \otimes_{A^G} B)^G$.*
2. *Si $(I_i)_{i \in J}$ est une famille d'idéaux G-stable de A, alors*
$$(\sum_{i \in J} I_i) \cap A^G = \sum_{i \in I} (I_i \cap A^G)$$
3. *Si A est noetherien, alors A^G aussi.*
4. *Si $I \subset A$ est un idéal G-stable, alors $(A/I)^G$ est l'image de A^G par le morphisme quotient $A \to A/I$.*

Démonstration. — *Premier point :* on a un isomorphisme de A^G-modules

$$A \xrightarrow{\sim} A^G \oplus \mathrm{Ker}(\mathcal{R}_A)$$

soit

$$C \overset{\text{déf}}{=} A \otimes_{A^G} B \xrightarrow{\sim} B \oplus (\mathrm{Ker}(\mathcal{R}_A) \otimes_{A^G} B).$$

En particulier $b \mapsto 1 \otimes b$ induit $B \subset C^G$.

Soit $\sum a_i \otimes b_i \in C^G$. On a

$$\begin{aligned}
\sum a_i \otimes b_i &= \mathcal{R}_C(\sum a_i \otimes b_i) \\
&= \sum \mathcal{R}_C(a_i \otimes b_i) \\
&= \sum \mathcal{R}_C[(a_i \otimes 1).(1 \otimes b_i)] \\
\text{identité de Reynolds} \quad &= \sum \mathcal{R}_C((a_i \otimes 1))\,(1 \otimes b_i) \\
\text{fonctorialité du Reynolds} \quad &= \sum (\mathcal{R}_A(a_i) \otimes 1)(1 \otimes b_i) \\
&= \sum \mathcal{R}_A(a_i) \otimes b_i \\
&= \sum 1 \otimes \mathcal{R}_A(a_i) b_i \in B
\end{aligned}$$

Deuxième point : soit $x \in (\sum I_\alpha) \cap A^G$. Écrivons $x = \sum x_\alpha$. On a

$$\mathcal{R}_A(x) = x = \sum \mathcal{R}_A(x_\alpha) \in \sum (A^G \cap I_\alpha).$$

Troisième point : par le premier point, si I est un idéal de A^G, $I = (I.A)^G$.
Quatrième point : déjà vu (le morphisme quotient est surjectif).

□

2.2. Quotient d'un schéma affine par un groupe linéairement réductif. —

Théorème 2.17. — *Soit X une variété algébrique affine définie sur k muni d'une action d'un k-groupe algébrique affine G supposé linéairement réductif. Alors*

1. *$\Gamma(X)^G$ est une k-algèbre de type fini. Le morphisme G-invariant $\pi : X \to Y$ induit par l'inclusion $\Gamma(X)^G \hookrightarrow \Gamma(X)$ est un bon quotient catégorique.*
2. *Si W_1 et W_2 sont deux fermés G-stables de X, alors il existe $f \in \Gamma(X)^G$ qui vaut 0 sur W_1 et 1 sur W_2.*
3. *Pour tout ouvert $U \subset Y$, $\pi^{-1}(U) \to U$ est un bon quotient catégorique ; plus généralement pour tout changement de base $Y' \to Y$, $X \times_Y Y' \to Y'$ est un bon quotient catégorique.*

Remarque 2.18. — Le quotient du groupe linéaire GL_n par le sous-groupe H des matrices qui fixent la droite engendrée par le premier vecteur de la base canonique existe (comme quotient géométrique, donc catégorique) et est isomorphe à $\mathbf{P}^{n-1}$ (espace des droites de k^n). Donc en général un quotient catégorique d'une variété affine, s'il existe, n'est pas nécessairement affine.

Remarque 2.19. — En particulier, sous les hypothèses du théorème, $\pi : X \to Y$ est un quotient géométrique si et seulement si les fibres sont les orbites, et alors tout changement de base est encore un quotient géométrique.

Démonstration. — Montrons que si une G-algèbre A est de type fini sur k, alors aussi A^G.

Supposons d'abord A graduée de manière compatible à l'action de G, c'est-àdire on a une écriture $A = \oplus_{n \in \mathbf{N}} A_n$ avec $A_0 = k$, les A_n sont des sous-G-modules et $A_n.A_m \subset A_{n+m}$. Alors A^G est graduée, noetherienne, donc de type fini sur k (prendre un système fini de générateur de l'idéal des éléments de degré strictement positif ; par récurrence sur le degré, on montre aussitôt que ce système fini engendre l'algèbre).

Dans le cas général soit $V \subset A$ un sous-G-module de dimension finie contenant un système fini de générateurs de A. Soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base de V. La structure de G-module sur V induit naturellement une structure de G-algèbre graduée sur $B \overset{\text{déf}}{=} k[X_1, \dots, X_n]$ et un morphisme surjectif de G-algèbre $B \to A$, $X_i \mapsto v_i$. Par ce qui précède, B^G est de type fini sur k. Par fonctorialité du Reynolds, B^G s'envoie surjectivement sur A^G.

Montrons que $X \to Y$ est un bon quotient catégorique. Soit $Y_f \subset Y$ ouvert affine principal. Alors

$$\Gamma(\pi^{-1}(Y_f)) = \Gamma(X_f) = \Gamma(X)_f$$

et il est clair que $\Gamma(X)_f^G = (\Gamma(X)^G)_f$ (ici on n'a pas besoin d'utiliser la réductivité) Ainsi l'hypothèse 1. de la proposition 1.3 est vérifiée.

Soient $\{W_i\}_{i\in J}$ des fermés G-invariants, $\{I_i\}_{j\in J}$ leurs idéaux.

D'après le point 2 du lemme 2.16 appliqué à cette famille d'idéaux, l'adhérence de $\pi(\cap_{i\in J} W_i)$ coïncide avec l'intersection des adhérences des $\overline{\pi(W_i)}$ Si W est fermé G-invariant quelconque, supposons $\pi(W)$ non fermé, soit $y \in \overline{\pi(W)} \setminus \pi(W)$. On a

$$\varnothing = \overline{\pi(W \cap \pi^{-1}(\{y\}))} = \overline{\pi(W)} \cap \{y\} = \{y\}.$$

Donc $\pi(W)$ est fermé.

Ainsi les hypothèses 2. et 3. de la proposition 1.3 sont vérifiées. Donc π est un bon quotient catégorique.

Soient W_1 et W_2 des fermés G-invariants disjoints. Soient I_1, I_2 les idéaux de W_1, W_2. Par hypothèse $I_1 + I_2 = \Gamma(X)$. Donc

$$1 \in (I_1 + I_2) \cap \Gamma(X)^G = (I_1 \cap \Gamma(X)^G) + (I_2 \cap \Gamma(X)^G)$$

soit $1 = f_1 + f_2$. Alors f_1 vaut 0 sur W_1 et 1 sur W_2.

Pour tout ouvert $U \subset Y$, $\pi^{-1}(U) \to U$ est un bon quotient catégorique : il suffit de le montrer pour Y ouvert affine principal (être un bon quotient catégorique est de nature locale sur le but) et d'après la première partie du théorème le morphisme $\pi^{-1}(Y_f) \to Y_f$ est un bon quotient catégorique.

Même principe pour un changement de base quelconque : par la nature locale du bon quotient catégorique, on peut se limiter aux changements de base $Y' \to Y$ avec Y' affine, et $X \times_Y Y'$ est (un schéma) affine avec

$$\Gamma(X \times_Y Y') = \Gamma(X) \otimes_{\Gamma(Y)} \Gamma(Y')$$

D'après le point 1 du lemme 2.16, on a

$$\Gamma(X \times_Y Y')^G = \Gamma(Y').$$

□

Références

[DK02] Harm Derksen and Gregor Kemper. *Computational invariant theory.* Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, I. Springer-Verlag, Berlin, 2002. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 130.

[Dol03] Igor Dolgachev. *Lectures on invariant theory,* volume 296 of *London Mathematical Society Lecture Note Series.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[Koh11] Martin Kohls. A user friendly proof of Nagata's characterization of linearly reductive groups in positive characteristics. *Linear Multilinear Algebra*, 59(3) :271–278, 2011.

[MFK94] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan. *Geometric invariant theory*, volume 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1994.

[Nag62] Masayoshi Nagata. Complete reducibility of rational representations of a matric group. *J. Math. Kyoto Univ.*, 1 :87–99, 1961/1962.

David