Proposition. *Soient n, m des entiers supérieurs ou égaux à 1. Alors :*

(1) *Il existe une injection $\{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ si et seulement si $n \leqslant m$.*

(1) *Il existe une surjection $\{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ si et seulement si $n \geqslant m$.*

(1) *Il existe une bijection $\{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ si et seulement si $n = m$.*

Démonstration. Seul le point (2) restait à démontrer. Si $n \geqslant m$, on peut considérer l'application $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ définie par $f(k) = k$ si $1 \leqslant k \leqslant m$ et $f(k) = 1$ si $k > m$. (On peut aussi poser $f(k) = m$ pour $k > m$, je crois que c'est ce que j'ai fait en cours. Cela ne change rien.) Cette application est surjective, car le fait que $f(k) = k$ si $1 \leqslant k \leqslant m$ implique que tout élément $k \in \{1, \dots, m\}$ possède un antécédent puisqu'il est l'image par f de lui-même. Donc il existe une surjection $\{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$.

Réciproquement, démontrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la propriété :

$$P(n) : \text{pour tout } m \geqslant 1, \text{ s'il existe une surjection } \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}, \text{ alors } n \geqslant m.$$

Initialisons la récurrence. Soit $n = 1$ et $m \geqslant 1$ quelconque. S'il existe une surjection $f : \{1\} \to \{1, \dots, m\}$, tout élément $k \in \{1, \dots, m\}$ possède un antécédent et cet antécédent est forcément 1. Il s'ensuit que $k = f(1)$, donc tous les éléments de $\{1, \dots, m\}$ sont égaux (ils sont égaux à $f(1)$), ce qui n'est possible que si $m = 1$. Donc on a bien $n = 1 \geqslant 1 = m$. Pour montrer que la propriété est héréditaire, supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geqslant 1$ et démontrons $P(n+1)$. Soient $m \geqslant 1$ un entier et $f : \{1, \dots, n+1\} \to \{1, \dots, m\}$ une surjection. Si $m = 1$, il n'y a rien à démontrer car on a $n+1 \geqslant n \geqslant 1 = m$ comme souhaité. Donc on peut supposer pour la suite que $m \geqslant 2$. Considérons la restriction de f à l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, notée $f' : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$, $f'(k) = f(k)$ et distinguons deux cas.

Si f' est surjective, alors d'après l'hypothèse de récurrence, on a $n \geqslant m$ donc $n + 1 \geqslant n \geqslant m$ et on a terminé.

Si f' n'est pas surjective, puisque f l'est, cela signifie que la valeur $t := f(n+1)$ n'est pas dans l'image de f'. En d'autres termes, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on a $f(k) \neq t$. Si l'on réduit l'ensemble but de f', on obtient une application $f'' : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\} \smallsetminus \{t\}$ qui est maintenant surjective. En composant avec une bijection $u : \{1, \dots, m\} \smallsetminus \{t\} \to \{1, \dots, m-1\}$ fournie par le lemme, on obtient une surjection

$$\{1, \dots, n\} \xrightarrow{f''} \{1, \dots, m\} \smallsetminus \{t\} \xrightarrow{u} \{1, \dots, m-1\}.$$

(C'est pour pouvoir écrire ceci qu'on a montré ci-dessus qu'on pouvait supposer $m \geqslant 2$.) D'après l'hypothèse de récurrence, ceci implique que $n \geqslant m - 1$ donc $n + 1 \geqslant m$. Ceci conclut la preuve du fait que $P(n + 1)$ est vérifiée. $\square$