Licence 1 Mathématiques – Université Rennes 1 Matthieu Romagny, 23 novembre 2016
Algèbre et Arithmétique 1

Corrigé de l'exercice 16 de la feuille de TD no 4

Soient n et p deux entiers naturels. On suppose que $n \geqslant p \geqslant 0$. On considère l'égalité :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} \qquad (1)$$

1. *Montrer l'égalité (1) à l'aide d'une récurrence.*
   Fait en classe.
2. *On note E l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et $n+1$: $E = \{1, \ldots, n, n+1\}$.*
   (a) *Soit A une partie à $p+1$ éléments de E. Montrer que son plus grand élément, noté m, est un entier compris entre $p+1$ et $n+1$.*
   Pour une partie A quelconque dont on note m le plus grand élément, si $m \leqslant p$, alors la partie A est incluse dans $\{1, \ldots, p\}$ donc son cardinal est inférieur ou égal à p. Par contraposée, si $\mathrm{card}(A) = p+1 > p$, alors le plus grand élément m est $\geqslant p+1$. Il est donc compris entre $p+1$ et $m+1$.
   (b) *On fixe un entier $m \in \{p+1, \ldots, n+1\}$. Combien y a-t-il de parties $A \subset E$ ayant $p+1$ éléments et dont le plus grand élément est m ?*
   Notons $a_1 < a_2 < \cdots < a_p < a_{p+1}$ les $p+1$ éléments de A, une fois ordonnés. Les parties A dont le plus grand élément a_{p+1} est fixé égal à m sont déterminées par le choix des p éléments $a_1, a_2, \ldots, a_p$ qui appartiennent à $\{1, \ldots, m-1\}$. (Plus formellement, on peut formuler cet argument en disant qu'on a une bijection f entre l'ensemble des parties $A \subset E$ ayant $p+1$ éléments et dont le plus grand élément est m, et l'ensemble des parties $A' \subset \{1, \ldots, m-1\}$ ayant p éléments, donnée par $f(A) = A \smallsetminus \{m\}$. Sa bijection réciproque g est donnée par $g(A') = A' \cup \{m\}$.) Le nombre de telles parties $A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ est $\binom{m-1}{p}$.
   (c) *Montrer l'égalité (1) en utilisant un raisonnement combinatoire.*
   Notons $P := \mathcal{P}_{p+1}(E)$ l'ensemble des parties à $p+1$ éléments de E. On sait d'après le cours que $\mathrm{card}(P) = \binom{n+1}{p+1}$. Pour chaque $m \in \{p+1, \ldots, n+1\}$ notons P_m l'ensemble des parties A comme ci-dessus dont le plus grand élément est m. On a calculé dans la question b que $\mathrm{card}(P_m) = \binom{m-1}{p}$. D'après la question a, chaque partie A possède un plus grand élément $m \in \{p+1, \ldots, n+1\}$ donc les parties $P_{p+1}, \ldots, P_{n+1}$ recouvrent P, c'est-à-dire que leur réunion est égale à P. Comme chaque partie ne possède qu'un seul plus grand élément, les parties P_m sont toutes disjointes deux à deux. On peut donc écrire $P = P_{p+1} \amalg \cdots \amalg P_{n+1}$. En utilisant la formule qui donne le cardinal d'un ensemble qui est exprimé comme une réunion disjointe de parties, on trouve :

$$\binom{n+1}{p+1} = \mathrm{card}(P) = \sum_{m=p+1}^{n+1} \binom{m-1}{p}.$$

   En faisant le changement d'indices $k = m-1$ on obtient $\binom{n+1}{p+1} = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$.

Remarque : nous avons vu dans le cours que si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est une partition de E, alors $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(A_1) + \cdots + \mathrm{card}(A_n)$. Les parties A_i d'une partition sont par définition non vides, mais plus généralement, si E est recouvert par des parties disjointes $A_1, \ldots, A_n$ *dont certaines sont éventuellement vides*, alors cette formule est encore valable.