Corrigé des exercices 3, 5, 8, 16, 17, 18 de la feuille de TD no 4

Exercice 3. Corrigé.
1. Notons C l'ensemble à 8 éléments formé par les 8 élèves de la classe. La question posée est de compter le nombre de manière d'écrire $C = A \cup B$ avec A et B deux ensembles à 4 éléments. (On peut noter que A et B forment une partition de C.) Le nombre de choix possibles pour A est égal à $\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = (8.7.6.5)/(4.3.2.1) = 70$. Une fois choisie A, on n'a plus de choix possible pour la partie B qui doit nécessairement être égale à $C \smallsetminus A$. Dans cette manière de compter, on a ordonné les parties A (« la première ») et B (« la seconde ») alors qu'en réalité elles ne le sont pas ; dit autrement, le choix de la partie A et de la partie $C \smallsetminus A$ donnent lieu à la même partition de C en deux groupes de 4. Il faut donc diviser par 2 le nombre précédent pour obtenir la réponse à la question, qui est donc $70/2 = 35$.

2. Soit n le nombre d'éléments de S. L'énoncé nous dit que $\binom{n}{3} = 364$, c'est-à-dire $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 364$ ou encore $n(n-1)(n-2) = 2184$. Notons E l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à 3. La fonction $f : E \to E$ définie par $f(n) = n(n-1)(n-2)$ est strictement croissante car si $n' > n \geqslant 3$, on a $n'-1 > n-1 \geqslant 2$ et $n'-2 > n-2 \geqslant 1$, donc en multipliant ces trois quantités on trouve $f(n') > f(n) \geqslant 6$. On en déduit que f est injective. Donc s'il existe un entier $n \geqslant 3$ solution de l'équation $f(n) = 2184$, alors celui-ci est unique. Comme $f(n)$ est de l'ordre de n^3, en calculant $\sqrt[3]{2184}$ on voit que n doit être proche de 13 ou 14. En prenant $n = 14$ on voit qu'on gagne : $f(14) = 2184$. Donc finalement $\mathrm{card}(S) = 14$.

Exercice 5. Corrigé.
1. On calcule :

$$\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}+\frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} = \frac{p\times(n-1)!+(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n\times(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

2. Voir le cours.

Exercice 8. Corrigé.
1. Je vous laisse la joie du calcul...

2. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Comme $n \geqslant 2$, on peut choisir deux éléments a et b dans E. Nous allons dénombrer l'ensemble $P_2(E)$ des parties à p éléments de E. On sait d'après le cours qu'il est de cardinal $\binom{n}{p}$. On peut également dénombrer $P_2(E)$ en le partitionnant de la manière suivante. Pour toute partie $A \subset E$, on peut dire que :

1) soit A contient a et b ; on notera Q_1 l'ensemble de ces parties,
2) soit A contient a mais pas b ; on notera Q_3 l'ensemble de ces parties,
3) soit A contient b mais pas a ; on notera Q_3 l'ensemble de ces parties,
4) soit A ne contient ni a ni b ; on notera Q_4 l'ensemble de ces parties.

Les parties $A \in Q_1$ sont en bijection avec les parties $A \smallsetminus \{a,b\}$ de cardinal $p-2$ dans l'ensemble $E \smallsetminus \{a,b\}$ qui est de cardinal $n-2$; il y en a $\binom{n-2}{p-2}$. Les parties $A \in Q_2$ sont en bijection avec les parties $A \smallsetminus \{a\}$ de cardinal $p-1$ dans l'ensemble $E \smallsetminus \{a,b\}$ qui est de cardinal $n-2$; il y en a $\binom{n-2}{p-1}$. Le même décompte est valable pour les parties de Q_3. Enfin les parties $A \in Q_4$ sont en bijection avec les parties A de cardinal p dans l'ensemble $E \smallsetminus \{a,b\}$ qui est de cardinal $n-2$; il y en a $\binom{n-2}{p}$. Finalement $\binom{n}{p} = \mathrm{card}\, P_2(E) = \sum_{i=1}^{4} \mathrm{card}(Q_i) = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$.

Exercice 16. Corrigé.
1. Je vous laisse la joie de la récurrence...

2.a. Pour une partie A quelconque dont on note m le plus grand élément, si $m \leqslant p$, alors la partie A est incluse dans $\{1, \ldots, p\}$ donc son cardinal est inférieur ou égal à p. Par contraposée, si $\operatorname{card}(A) = p+1 > p$, alors le plus grand élément m est $\geqslant p+1$. Il est donc compris entre $p+1$ et $m+1$.

2.b. Notons $a_1 < a_2 < \cdots < a_p < a_{p+1}$ les $p+1$ éléments de A, une fois ordonnés. Les parties A dont le plus grand élément a_{p+1} est fixé égal à m sont déterminées par le choix des p éléments $a_1, a_2, \ldots, a_p$ qui appartiennent à $\{1, \ldots, m-1\}$. (Plus formellement, on peut formuler cet argument en disant qu'on a une bijection f entre l'ensemble des parties $A \subset E$ ayant $p+1$ éléments et dont le plus grand élément est m, et l'ensemble des parties $A' \subset \{1, \ldots, m-1\}$ ayant p éléments, donnée par $f(A) = A \smallsetminus \{m\}$. Sa bijection réciproque g est donnée par $g(A') = A' \cup \{m\}$.) Le nombre de telles parties $A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ est $\binom{m-1}{p}$.

2.c. Notons $P := \mathcal{P}_{p+1}(E)$ l'ensemble des parties à $p+1$ éléments de E. On sait d'après le cours que $\operatorname{card}(P) = \binom{n+1}{p+1}$. Pour chaque $m \in \{p+1, \ldots, n+1\}$ notons P_m l'ensemble des parties A comme ci-dessus dont le plus grand élément est m. On a calculé dans la question b que $\operatorname{card}(P_m) = \binom{m-1}{p}$. D'après la question a, chaque partie A possède un plus grand élément $m \in \{p+1, \ldots, n+1\}$ donc les parties $P_{p+1}, \ldots, P_{n+1}$ recouvrent P, c'est-à-dire que leur réunion est égale à P. Comme chaque partie ne possède qu'un seul plus grand élément, les parties P_m sont toutes disjointes deux à deux. On peut donc écrire $P = P_{p+1} \amalg \cdots \amalg P_{n+1}$. En utilisant la formule qui donne le cardinal d'un ensemble qui est exprimé comme une réunion disjointe de parties, on trouve :

$$\binom{n+1}{p+1} = \operatorname{card}(P) = \sum_{m=p+1}^{n+1} \binom{m-1}{p}.$$

En faisant le changement d'indices $k = m-1$ on obtient $\binom{n+1}{p+1} = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$.

Remarque : nous avons vu dans le cours que si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est une partition de E, alors $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(A_1) + \cdots + \operatorname{card}(A_n)$. Les parties A_i d'une partition sont par définition non vides, mais plus généralement, si E est recouvert par des parties disjointes $A_1, \ldots, A_n$ *dont certaines sont éventuellement vides*, alors cette formule est encore valable.

Exercice 17. Corrigé. *Avertissement : exercice difficile !*

Nous n'avons pas vu en cours le terme *permutation*. Voici donc sa définition : pour les ensembles finis, une *permutation* est simplement une bijection. Cette terminologie est utilisée surtout (si ce n'est exclusivement) pour les ensembles finis. Pour une permutation $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, un *point fixe* est un $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $f(i) = i$. Par exemple, pour $n = 3$ voici deux permutations f et g : f est définie par $f(1) = 3$, $f(2) = 2$ et $f(3) = 1$ et g est définie par $g(1) = 2$, $g(2) = 3$ et $g(3) = 1$. La permutation f possède donc un point fixe, qui est $i = 2$, alors que la permutation g ne possède aucun point fixe. Parmi les permutations de $\{1, \ldots, n\}$, la seule qui possède n points fixes est l'identité.

Par ailleurs, il convient de corriger un peu la terminologie de l'exercice : classiquement, ce qu'on appelle *dérangement* est une permutation qui ne possède aucun point fixe. Lorsque $k \geqslant 1$, les permutations ayant k points fixes sont plutôt appelées... permutations ayant k points fixes.

1. Notons $E = \{1, \ldots, n\}$ et $P = \operatorname{Bij}(E)$ l'ensemble des permutations de E. On sait que $\operatorname{card}(P) = n!$ (formule pour le cardinal de l'ensemble des bijections d'un ensemble fini). Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, notons A_k l'ensemble des permutations de E qui possèdent exactement k points fixes : l'énoncé nous dit que $D_{n,k} = \operatorname{card}(A_k)$. L'observation utile pour l'exercice est que $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ forme une partition de P, puisque chaque permutation possède un certain nombre k de points fixes, uniquement déterminé, qui permet de dire que cette permutation appartient à A_k et à aucune autre des parties $A_{k'}$. En prenant les cardinaux dans l'écriture $P = A_0 \amalg A_1 \amalg \cdots \amalg A_n$ on trouve $n! = D_{n,0} + \cdots + D_{n,n}$.

2. La clé de la réponse est de voir qu'une permutation f est entièrement déterminée par la paire composée de l'ensemble F de ses points fixes et par la restriction de f à $E \setminus F$, qui est un dérangement. Précisons ceci. Soit $f : E \to E$ une permutation et notons F l'ensemble de ses points fixes. Si $i \notin F$, c'est-à-dire si $f(i) \neq i$, alors en appliquant f, comme f est injective on obtient $f(f(i)) \neq f(i)$, c'est-à-dire $f(i) \notin F$. On a montré que $i \notin F$ implique $f(i) \notin F$, donc la restriction de f à $E \setminus F$ est une application $f' = f_{E \setminus F} : E \setminus F \to E \setminus F$. Il est immédiat de vérifier que f' est une permutation de $E \setminus F$ et que bien sûr f' ne possède aucun point fixe, c'est-à-dire est un dérangement ; ceci est laissé à la lectrice ou au lecteur. Il est clair que la paire (F, f') détermine f, puisqu'on peut retrouver f à l'aide de (F, f') par :

$$f(i) = \begin{cases} i & \text{si } i \in F, \\ f'(i) & \text{si } i \notin F. \end{cases}$$

Pour des permutations $f \in A_k$ qui possèdent exactement k points fixes, on a $\mathrm{card}(F) = k$. Ainsi un élément de A_k est déterminé par le choix de :

- son ensemble F de points fixes, qui est une partie à k éléments de E ; il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles :

- un dérangement f' de l'ensemble $E \setminus F$, qui est un ensemble à $n-k$ éléments ; il y a $D_{n-k,0}$ choix possibles.

Finalement on obtient $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}$.

3. Cette question est plus difficile et sa résolution aurait nécessité que l'énoncé donne plus d'indications. Compte tenu de l'égalité $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}$, la formule de la question 1 devient :

$$n! = D_{n,0} + D_{n,1} + \cdots + D_{n,n} = D_{n,0} + \binom{n}{1} D_{n-1,0} + \cdots + \binom{n}{k} D_{n-k,0} + \cdots + \binom{n}{n} D_{0,0}.$$

Pour aller plus loin, on peut par exemple démontrer la formule d'inversion suivante.

Lemme. *Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels ou complexes. Alors connaissant les nombres $v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$, on peut retrouver u_n par la formule suivante : $u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} v_{n-k}$ pour tout $n \geqslant 0$.*

Démonstration du lemme. Nous utiliserons la relation :

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{i} = \binom{n}{i} \binom{n-i}{k}.$$

On peut alors écrire :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} u_i = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{i} u_i \,,$$

si bien que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} v_{n-k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n-i}{k} \right) u_i \,.$$

Alors, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} v_{n-k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-1)^{n-i} = u_n \,.$$

C'est la formule annoncée. $\square$

Nous avons vu ci-dessus que lorsqu'on pose $u_n = D_{n,0}$, alors $v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k = n!$. En utilisant le lemme, ceci donne :

$$D_{n,0} = u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}.$$

En divisant par $n!$ on trouve $\frac{1}{n!} D_{n,0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Exercice 18. Corrigé.

1. Voici une première manière de dénombrer E. Notons E_k l'ensemble des paires $(A, x) \in E$ telles que $\mathrm{card}(A) = k$. Un élément de E_k est donc donné par une paire composée d'une partie A à k éléments de E (il y a $\binom{n}{k}$ telles parties) et un élément $x \in A$ (il y a k tels éléments puisque $\mathrm{card}(A) = k$). Au total on voit que le cardinal de E_k est égal à $k\binom{n}{k}$. Les parties E_k forment une partition de E, donc $\mathrm{card}(E) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{card}(E_k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Voici une deuxième manière de dénombrer E. On peut constater que E est l'ensemble des paires (x, A) telles que $x \in \{1, \dots, n\}$ et A contient x. Il y a n choix possibles pour x, et pour chaque x, l'ensemble des parties A qui le contiennent est en bijection avec l'ensemble des parties de $\{1, \dots, n\} \smallsetminus \{x\}$. Comme cet ensemble de parties est de cardinal 2^{n-1}, finalement E est de cardinal $n2^{n-1}$.

On obtient $Q_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

2. Faisons les choses dans l'ordre indiqué. D'abord on développe à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$$(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k.$$

Ensuite on dérive cette égalité ; on fait attention au fait que le terme d'indice $k = 0$ aura une dérivée nulle donc disparaît de la somme. On obtient :

$$n(1+X)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} X^{k-1}.$$

En évaluant cette égalité en $X = 1$ on trouve $n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = Q_n$. (Noter que comme $k\binom{n}{k} = 0$ lorsque $k = 0$, dans la somme qui définit le nombre Q_n on peut aussi bien commencer à $k = 1$.)

3. On dipose de la formule suivante, pour $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{k \times (k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

On en déduit, en faisant un changement d'indice $i = k - 1$:

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} = n2^{n-1}.$$

(On rappelle que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.)

4. Si on utilise sans se tromper la relation de Pascal, la démonstration par récurrence ne présente pas de piège. Comme elle n'est pas très éclairante, je ne donne pas le détail ici.

5. La question est une question bonus... le correcteur sort un joker (il est très fatigué).