Licence 1 Mathématiques – Université Rennes 1 Matthieu Romagny, 19/10/16
Algèbre et Arithmétique 1

Corrigé de l'exercice 5 de la feuille de TD no 3

Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E. Montrer les formules suivantes.

1. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Montrons l'inclusion directe. Soit $x \in (A \cap B) \cup C$. Ceci signifie que $x \in A \cap B$ ou $x \in C$. Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A \subset A \cup C$ et $x \in B \subset B \cup C$, donc $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Si $x \in C$, alors $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$ donc $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Dans tous les cas, on a $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Alors $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$. Si $x \in C$, alors $x \in (A \cap B) \cup C$. Si $x \notin C$, alors du fait que $x \in A \cup C$ on déduit que $x \in A$, et du fait que $x \in B \cup C$ on déduit que $x \in B$; finalement $x \in A \cap B$. Dans les deux cas, on a $x \in (A \cap B) \cup C$.

2. $\mathcal{C}_E(\mathcal{C}_E A) = A$.

On peut procéder par inclusion directe et inclusion réciproque mais la question est tellement simple qu'un raisonnement par équivalence direct est aussi possible. En effet, comme $\mathcal{C}_E A$ est l'ensemble des éléments qui n'appartient pas à A, son complémentaire est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A, c'est-à-dire A.

3. $\mathcal{C}_E(A \cap B) = (\mathcal{C}_E A) \cup (\mathcal{C}_E B)$.

Ici encore on peut raisonner par équivalences. Dire que $x \in \mathcal{C}_E(A \cap B)$ signifie que x n'appartient pas à $A \cap B$, c'est-à-dire que x n'appartient pas à A, ou x n'appartient pas à B. Ceci signifie que $x \in \mathcal{C}_E A$ ou $x \in \mathcal{C}_E B$, c'est-à-dire $x \in (\mathcal{C}_E A) \cup (\mathcal{C}_E B)$.

4. $\mathcal{C}_E(A \cup B) = (\mathcal{C}_E A) \cap (\mathcal{C}_E B)$.

Dire que $x \in \mathcal{C}_E(A \cup B)$ signifie que x n'appartient pas à $A \cup B$, c'est-à-dire que x n'appartient ni à A ni à B. Ceci signifie que $x \in \mathcal{C}_E A$ et $x \in \mathcal{C}_E B$, c'est-à-dire $x \in (\mathcal{C}_E A) \cap (\mathcal{C}_E B)$.