Matthieu Romagny, 2 novembre 2016

Corrigé de l'exercice 27 de la feuille de TD no 3

1. *Déterminer une bijection entre* $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{N}^*$*.*

Considérons l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ définie par $f(n) = n+1$. On dipose d'une application $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ définie par $g(n) = n-1$ qui vérifie $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ et $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}^*}$, donc f est bijective, de bijection réciproque g.

2. *En déduire une bijection entre* $\{1/n,\ n \geqslant 1\}$ *et* $\{1/n,\ n \geqslant 2\}$*.*

Notons $A = \{1/n,\ n \geqslant 1\}$, c'est l'ensemble des inverses des entiers $n \geqslant 1$. Notons $B = \{1/n,\ n \geqslant 2\}$, c'est l'ensemble des inverses des entiers $n \geqslant 2$. Ainsi, $B \subset A$ et le seul élément de B qui n'est pas dans A est 1 (correspondant à $n = 1$).

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, on a $m + 1 \geqslant 1$ donc on peut définir une application $h : \mathbb{N} \to A$ en posant $h(m) = 1/(m + 1)$. Il s'agit d'une bijection, de bijection réciproque $k : A \to \mathbb{N}$ définie par $k(x) = \frac{1}{x} - 1$. (Pour vérifier que k est bien définie il faut dire que pour tout $x \in A$ il existe un entier $n \geqslant 1$ unique tel que $x = 1/n$, et alors $k(x) = \frac{1}{x} - 1 = n - 1 \in \mathbb{N}$. Pour dire que h est bijective il suffit de vérifier directement que $k \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ et $h \circ k = \mathrm{id}_A$.) On voit par ailleurs que $h(\mathbb{N}^*) = B$ et h induit une bijection $h' : \mathbb{N}^* \to B$, $h'(m) = h(m)$. Notons $k' : B \to \mathbb{N}^*$, $k'(x) = k(x)$ sa bijection réciproque. On a donc des bijections :

$$A \xrightarrow{k} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}^* \xrightarrow{h'} B.$$

Comme une composée de bijections est une bijection, l'application $u = h' \circ f \circ k : A \to B$ est une bijection. On peut donner son expression explicite : $u(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{x}{1+x}$. On voit que u envoie $x = 1/n$ sur $1/(n+1)$, ce qui est bien le « décalage d'indices » que l'on voit intuitivement.

3. *En déduire une bijection entre* $[0, 1]$ *et* $[0, 1[$*.*

On a $A \subset [0, 1]$; notons C le complémentaire de A dans $[0, 1]$. Ainsi, on a $[0, 1] = A \cup C$ et $[0, 1[= B \cup C$ et ces écritures sont d'ailleurs des partitions de $[0, 1]$ et $[0, 1[$ en deux parties. Définissons une application $\alpha : [0, 1] \to [0, 1[$ de la manière suivante :

$$\alpha(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in A, \\ x & \text{si } x \in C. \end{cases}$$

On vérifie sans peine que α est une bijection :

- par exemple, comme précédemment, en exhibant une application $\beta : [0, 1[\to [0, 1]$ qui sera sa bijection réciproque. Pour cela on note $v := u^{-1} : B \to A$ la bijection réciproque de u et on pose :

$$\beta(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x \in B, \\ x & \text{si } x \in C. \end{cases}$$

  Pour vérifier que $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{[0,1]}$ on distingue les cas $x \in A$ et $x \notin A$ (je laisse les détails). De même pour vérifier que $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{[0,1[}$ on distingue les cas $x \in A$ et $x \notin A$ (je laisse les détails).
- ou alors, en montrant directement que α est injective et surjective.