

*Contrôle continu 3*  
*Durée : 30 min*

### Exercice 1

---

Un digicode est la donnée d'une suite de 5 chiffres compris entre 0 et 9.

1. Combien y a-t-il de digicodes ?
2. Combien y a-t-il de digicodes où aucun chiffre n'est répété ?
3. Combien y a-t-il de digicodes constitués d'une suite *strictement* croissante de chiffres ?

### Exercice 2

---

Si  $E$  est un ensemble, on note  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ .

1. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a  $2^n \geq n + 1$ .
2. Soit  $E$  un ensemble fini. Dédurre de la question précédente qu'il n'existe pas d'application surjective de  $E$  vers  $\mathcal{P}(E)$ .
3. Soit  $E$  un ensemble. Construire une application injective de  $E$  vers  $\mathcal{P}(E)$ .
4. Soit  $E$  un ensemble et  $f$  une application de  $E$  vers  $\mathcal{P}(E)$ . Soit  $A$  l'ensemble des  $x$  de  $E$  tels que  $x \notin f(x)$ . On suppose qu'il existe  $x \in E$  tel que  $f(x) = A$ . En considérant successivement les deux cas  $x \in A$  et  $x \notin A$ , aboutir à une contradiction. Quel résultat vient-on de démontrer ?