3.6 Exercices (26 septembre 2022)

Exercice 3.1 Représenter les points M_k d'affixes z_k pour $k = 1, \dots, 5$ avec

$$z_1 = -2, \quad z_2 = 2i, \quad z_3 = 2 + 2i, \quad z_4 = 2 - 2i, \quad z_5 := -2 - 2i.$$

Exercice 3.2 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de :

1. $z = \dfrac{1}{1+i}$,
2. $z = \dfrac{1+i}{1-i}$,
3. $z = (1+i)^4$,
4. $z = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

Exercice 3.3 On considère le nombre complexe

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1. Calculer z^2 et z^3.
2. En déduire z^n pour tout $1 \leq n \leq 6$.
3. En déduire l'inverse z^{-1} de z.
4. En déduire aussi la valeur de $(1 + i\sqrt{3})^5$.
5. En déduire finalement les valeurs de

$$(1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5 \quad \text{et} \quad (1 + i\sqrt{3})^5 - (1 - i\sqrt{3})^5.$$

Exercice 3.4 On pose $z = 2e^{i\pi/4}$.

1. Déterminer les formes exponentielles de $\overline{z}$, z^{-1}, $-z$ et iz.
2. Représenter tous ces nombres dans le plan complexe.

Exercice 3.5 Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

1. $z = 1$,
2. $z = -1$,
3. $z = i$,
4. $z = -i$,
5. $z = 1 + i$,
6. $z = 1 - i$,
7. $z = -1 + i\sqrt{3}$,
8. $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Exercice 3.6 Utiliser les formules d'Euler pour linéariser les expressions suivantes :

1. $\cos^5(x)$,
2. $\sin^5(x)$,
3. $\cos^2(3x)\sin^2(5x)$,
4. $\cos^2(x)\sin^4(x)$.

Exercice 3.7 Montrer que $e^{i\frac{\pi}{12}} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 3.8 Déterminer la forme exponentielle des nombres suivants :

1. $z = (1+i)^9$,
2. $z = (1-i)^7$,
3. $z = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

Exercice 3.9 Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ satisfont $|a - b| < \pi$, alors le module et l'argument de $z := e^{ia} + e^{ib}$ sont respectivement $r = 2\cos\frac{a-b}{2}$ et $\theta = \frac{a+b}{2}$. Où a-t-on utilisé l'hypothèse ?

Exercice 3.10 Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition suivante :

1. $|z - 1| = |z - 3 - 2i|$,
2. $|z - 3| = |z - 1 - i|$,
3. $|z - 2 + i| = \sqrt{5}$,
4. $|(1 + i)z - 2 - i| = 2$,
5. $|z + 3 - i| \leq 2$,
6. $|z + 3 - i| \geq |z|$,
7. $|z| < |z + 3 - i| < 2$.

Exercice 3.11 Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $z = 5 + 12i$,
2. $z = 1 + 4\sqrt{5}i$,
3. $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Exercice 3.12 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $2z^2 - 6z + 5 = 0$,
2. $5z^2 + (9 - 7i)z + 2 - 6i = 0$,
3. $z^2 + (2 + i)z - 1 + 7i = 0$.

Exercice 3.13 Montrer que si $s, p, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, alors z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $z^2 - sz + p = 0$ si et seulement si $z_1 + z_2 = s$ et $z_1 z_2 = p$.

Exercice 3.14 Déterminer les racines n-èmes de z dans les cas suivants :

1. $n = 3$ et $z = 1 + i$,
2. $n = 4$ et $z = 4i$,
3. $n = 6$ et $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$.

Exercice 3.15 On désigne par $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des *entiers de Gauss*, c'est-à-dire les nombres qui s'écrivent $m + in$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que si $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$, alors $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}[i]$ et $\alpha\beta \in \mathbb{Z}[i]$.
2. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$, alors $|\alpha| = 0$ ou $|\alpha| \geq 1$.
3. Déterminer tous les couples d'entiers (m, n) tels que $m^2 + n^2 = 1$.
4. Déterminer tous les éléments *inversibles* de $\mathbb{Z}[i]$, c'est-à-dire les nombres complexes non nuls α tels que $\alpha, \alpha^{-1} \in \mathbb{Z}[i]$.

Exercice 3.16

1. Montrer que si $u, v \in \mathbb{C}$ et $x = u + v$, alors $x^3 = 51x + 104$ si et seulement si $u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = 51(u + v) + 104$.
2. En déduire que si $uv = 17$, alors $x^3 = 51x + 104$ si et seulement si u^3 et v^3 sont les solutions de $X^2 - 104X + 4913 = 0$.
3. Résoudre cette équation du second degré et montrer que ses solutions sont des cubes d'entiers de Gauss.
4. En déduire que l'équation originale $x^3 = 51x + 104$ a une solution entière que l'on déterminera.