1.3 Exercices (6 septembre 2022)

Exercice 1.1 Les propositions suivantes sont elles des tautologies ?

1. $\mathcal{P}$ ou non $\mathcal{Q}$,
2. $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow$ non $(\mathcal{P}$ et non $\mathcal{Q})$,
3. $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ et $(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R}) \Rightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R})$,
4. (non $\mathcal{P} \Rightarrow$ non $\mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$.

Exercice 1.2 Parmi les propositions suivantes, quelle est la négation de "$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$" ?

1. $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$,
2. non $\mathcal{P} \Rightarrow$ non $\mathcal{Q}$,
3. $\mathcal{P}$ ou non $\mathcal{Q}$,
4. $\mathcal{P}$ et non $\mathcal{Q}$.

Exercice 1.3

1. Donner une condition suffisante mais pas nécessaire pour qu'un entier naturel soit strictement plus grand que dix.
2. Donner une condition nécessaire mais pas suffisante pour qu'un entier naturel soit (exactement) divisible par six.

Exercice 1.4 Parmi les assertions suivantes relatives à une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, quelle est la contraposée de "f croissante $\Rightarrow f(3) \geq f(2)$" ?

1. $f(3) \geq f(2) \Rightarrow f$ croissante,
2. $f(3) < f(2) \Rightarrow f$ pas croissante,
3. f pas croissante $\Rightarrow f(3) < f(2)$.

Exercice 1.5 La proposition $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$ est elle vraie ? Qu'en est-il des propositions

$$2 > 1 \Rightarrow 2^2 > 1, \quad 0 > 1 \Rightarrow 0^2 > 1 \quad \text{et} \quad (-2) > 1 \Rightarrow (-2)^2 > 1?$$

Exercice 1.6 Pour chacune des formules suivantes, écrire sa négation et décider (démonstration) si cela a un sens de leur validité respective :

1. $\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \forall m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, m \leq n$,
2. $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \exists m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, m \leq n$,
3. $\exists x \in \mathbb{R}, x + y > 0$,
4. $\forall x \in \mathbb{R}, x + y > 0$,
5. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$,
6. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$,
7. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$,
8. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.

Exercice 1.7 Pour chacune des assertions suivantes relatives à une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, écrire la formule correspondante ainsi que sa négation et donner deux exemples qui satisfont l'assertion ainsi que deux autres qui ne la satisfont pas :

1. f est positive,
2. f est croissante,
3. f est croissante et positive,
4. f prend parfois des valeurs positives,
5. f est strictement positive,
6. f est paire.

Exercice 1.8 Montrer par contraposition les propriétés suivantes :

1. "Un entier naturel dont le carré est pair est automatiquement pair lui même",

2. "Un nombre réel dont le carré vaut deux est toujours strictement inférieur à deux".

Exercice 1.9 Montrer par l'absurde les assertions suivantes :
1. "Zéro est le seul réel positif qui est inférieur à tout réel strictement positif",
2. "La racine carrée de deux n'est pas un nombre entier".

Exercice 1.10 On considère la propriété $\mathcal{P}$:="$2^n > n^2$".
1. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.
2. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on $\mathcal{P}(n)$?

Exercice 1.11
1. Montrer que si n est un entier naturel tel que $4^n + 5$ est un multiple entier de 3, alors il en va de même de $4^{n+1} + 5$.
2. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, le nombre $4^n + 5$ est-il un multiple entier de 3 ?
3. Montrer que si n est un entier naturel tel que $10^n + 7$ est un multiple entier de 9, alors il en va de même de $10^{n+1} + 7$.
4. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, le nombre $10^n + 7$ est-il un multiple entier de 9 ?

Exercice 1.12 Montrer par récurrence que pour tout réel positif x et pour tout entier naturel n, on a $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 1.13 Montrer par récurrence que les formules suivantes sont valides pour tout entier naturel n (non nul en ce qui concerne la dernière) :
1. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2$,
2. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,
3. $1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
4. $-1 + 4 - 9 + \cdots + (-1)^n n^2 = (-1)^n \dfrac{n(n+1)}{2}$,
5. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1} \quad (n \neq 0)$.