

### 3.6 Exercices (28 septembre 2021)

**Exercice 3.1** Représenter les points  $M_k$  d'affixes  $z_k$  pour  $k = 1, \dots, 5$  avec

$$z_1 = -2, \quad z_2 = 2i, \quad z_3 = 2 + 2i, \quad z_4 = 2 - 2i, \quad z_5 := -2 - 2i.$$

**Exercice 3.2** Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de :

$$1. z = \frac{1}{1+i},$$

$$2. z = \frac{1+i}{1-i},$$

$$3. z = (1+i)^4,$$

$$4. z = \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3.$$

**Exercice 3.3** On considère le nombre complexe

$$z = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1. Calculer  $z^2$  et  $z^3$ .
2. En déduire  $z^n$  pour tout  $1 \leq n \leq 6$ .
3. En déduire l'inverse  $z^{-1}$  de  $z$ .
4. En déduire aussi la valeur de  $(1 + i\sqrt{3})^5$ .
5. En déduire finalement les valeurs de

$$(1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5 \quad \text{et} \quad (1 + i\sqrt{3})^5 - (1 - i\sqrt{3})^5.$$

**Exercice 3.4** On pose  $z = 2e^{i\pi/4}$ .

1. Déterminer les formes exponentielles de  $\bar{z}$ ,  $z^{-1}$ ,  $-z$  et  $iz$ .
2. Représenter tous ces nombres dans le plan complexe.

**Exercice 3.5** Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

$$1. z = 1,$$

$$2. z = -1,$$

$$3. z = i,$$

$$4. z = -i,$$

$$5. z = 1 + i,$$

$$6. z = 1 - i,$$

$$7. z = -1 + i\sqrt{3},$$

$$8. z = 1 + i\sqrt{3}.$$

**Exercice 3.6** Utiliser les formules d'Euler pour linéariser les expressions suivantes :

$$1. \cos^5(x),$$

$$2. \sin^5(x),$$

$$3. \cos^2(3x) \sin^2(5x),$$

$$4. \cos^2(x) \sin^4(x).$$

**Exercice 3.7** Montrer que  $e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}$ . En déduire les valeurs de  $\cos(\pi/12)$  et  $\sin(\pi/12)$ .

**Exercice 3.8** Déterminer la forme exponentielle des nombres suivants :

$$1. z = (1+i)^9,$$

$$2. z = (1-i)^7,$$

$$3. z = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}.$$

**Exercice 3.9** Montrer que si  $a, b \in \mathbb{R}$  satisfont  $|a - b| < \pi$ , alors le module et l'argument de  $z := e^{ia} + e^{ib}$  sont respectivement  $r = 2 \cos \frac{a-b}{2}$  et  $\theta = \frac{a+b}{2}$ . Où a-t-on utilisé l'hypothèse ?

**Exercice 3.10** Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points  $M$  dont l'affixe  $z$  vérifie la condition suivante :

1.  $|z - 1| = |z - 3 - 2i|$ ,
2.  $|z - 3| = |z - 1 - i|$ ,
3.  $|z - 2 + i| = \sqrt{5}$ ,
4.  $|(1 + i)z - 2 - i| = 2$ ,
5.  $|z + 3 - i| \leq 2$ ,
6.  $|z + 3 - i| \geq |z|$ ,
7.  $|z| < |z + 3 - i| < 2$ .

**Exercice 3.11** Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1.  $z = 5 + 12i$ ,
2.  $z = 1 + 4\sqrt{5}i$ ,
3.  $z = 1 + i\sqrt{3}$ .

**Exercice 3.12** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes

1.  $2z^2 - 6z + 5 = 0$ ,
2.  $5z^2 + (9 - 7i)z + 2 - 6i = 0$ ,
3.  $z^2 + (2 + i)z - 1 + 7i = 0$ .

**Exercice 3.13** Montrer que si  $s, p, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , alors  $z_1$  et  $z_2$  sont les solutions de l'équation  $z^2 - sz + p = 0$  si et seulement si  $z_1 + z_2 = s$  et  $z_1 z_2 = p$ .

**Exercice 3.14** Déterminer les racines  $n$ -èmes de  $z$  dans les cas suivants :

1.  $n = 3$  et  $z = 1 + i$ ,
2.  $n = 4$  et  $z = 4i$ ,
3.  $n = 6$  et  $z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$ .

**Exercice 3.15** On désigne par  $\mathbb{Z}[i]$  l'ensemble des *entiers de Gauss*, c'est-à-dire les nombres qui s'écrivent  $m + in$  avec  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

1. Montrer que si  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ , alors  $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}[i]$  et  $\alpha\beta \in \mathbb{Z}[i]$ .
2. Montrer que si  $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ , alors  $|\alpha| = 0$  ou  $|\alpha| \geq 1$ .
3. Déterminer tous les couples d'entiers  $(m, n)$  tels que  $m^2 + n^2 = 1$ .
4. Déterminer tous les éléments *inversibles* de  $\mathbb{Z}[i]$ , c'est-à-dire les nombres complexes non nuls  $\alpha$  tels que  $\alpha, \alpha^{-1} \in \mathbb{Z}[i]$ .

**Exercice 3.16** 1. Montrer que si  $u, v \in \mathbb{C}$  et  $x = u + v$ , alors  $x^3 = 51x + 104$  si et seulement si  $u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = 51(u + v) + 104$ .

2. En déduire que si  $uv = 17$ , alors  $x^3 = 51x + 104$  si et seulement si  $u^3$  et  $v^3$  sont les solutions de  $X^2 - 104X + 4913 = 0$ .
3. Résoudre cette équation du second degré et montrer que ses solutions sont des cubes d'entiers de Gauss.
4. En déduire que l'équation originale  $x^3 = 51x + 104$  a une solution entière que l'on déterminera.