2.5 Exercices (12 septembre 2021)

Exercice 2.1 Soient E, F, G trois ensembles.
1. Si $E \subset F \cup G$, a-t-on obligatoirement $E \subset F$ ou $E \subset G$?
2. Si $E \cap F \subset G$, a-t-on obligatoirement $E \subset G$ ou $F \subset G$?

Exercice 2.2 Soient A et B deux parties de $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ qui se rencontrent (ne sont pas disjointes).
1. Le plus petit élément de $A \cap B$ est-il nécessairement le plus petit élément de A et de B ?
2. Le plus petit élément de $A \cup B$ est-il nécessairement le plus petit élément de A ou de B ?

Exercice 2.3 Soient A et B deux parties d'un ensemble E.
1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour qu'il existe une partie X de E telle que $A \cup X = B$? Déterminer alors toutes ces parties X.
2. Même question avec $A \cap X = B$.

Exercice 2.4 Soient A, B deux parties d'un ensemble E. Montrer que

1. $A \cup B \subset A \cap B \Rightarrow A = B$,
2. $A \cap B^c \neq \emptyset \Rightarrow A \not\subset B$,
3. $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$.

Exercice 2.5 Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Montrer que
1. $(A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C) \Rightarrow B \subset C$,
2. $(A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

Exercice 2.6 Soient E et F deux ensembles.
1. Un sous-ensemble X de $E \cup F$ est-il toujours de la forme $A \cup B$ avec $A \subset E$ et $B \subset F$?
2. Un sous-ensemble X de $E \times F$ est-il toujours de la forme $A \times B$ avec $A \subset E$ et $B \subset F$?

Exercice 2.7 Montrer que le disque unité dans $\mathbb{R}^2$ ne peut pas s'écrire comme produit de deux parties de $\mathbb{R}$.

Exercice 2.8 Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto 2n$,
2. $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{>0}, n \mapsto n + 1$,
3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto -n$,
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$,
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$,
6. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2$.

Exercice 2.9 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
1. Si $g \circ f$ est surjective, f est elle automatiquement surjective ?
2. Si $g \circ f$ est surjective, g est elle automatiquement surjective ?
3. Si $g \circ f$ est injective, f est elle automatiquement injective ?
4. Si $g \circ f$ est injective, g est elle automatiquement injective ?

Exercice 2.10
1. Soient $f : E \to F$ et $g_1, g_2 : F \to G$ trois applications telles que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. A-t-on toujours $g_1 = g_2$? Et si f est injective ? Et si f est surjective ?
2. Soient $f_1, f_2 : E \to F$ et $g : F \to G$ trois applications telles que $g \circ f_1 = g \circ f_2$. A-t-on toujours $f_1 = f_2$? Et si g est injective ? Et si g est surjective ?

Exercice 2.11 On considère les applications $f, g : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ définies respectivement par

$$\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad f(n) = 2n \quad \text{et} \quad g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$ et dire pour chacune des applications f, g, $g \circ f$ et $f \circ g$ si elle est injective, surjective ou bijective.

Exercice 2.12 Si $f : E \to E$ est une application et $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on définit f^n par récurrence en posant :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, f^{n+1} = f^n \circ f.$$

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, f^{n+1} = f \circ f^n$.
2. Montrer par récurrence que si f est bijective, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, f^n est aussi bijective et que $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n$.

Exercice 2.13
1. Déterminer une bijection entre $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ et $\mathbb{Z}_{\geq 2}$,
2. en déduire une bijection entre $A_1 := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$ et $A_2 := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}\}$,
3. montrer que $[0,1] \smallsetminus A_1 = [0,1[\smallsetminus A_2$,
4. en déduire une bijection entre $[0,1]$ et $[0,1[$.

Exercice 2.14
1. Établir une bijection entre $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $\mathbb{Z}$ (on pourra compter alternativement les nombres positifs et les nombres négatifs).
2. Établir une bijection entre $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (on pourra compter les couples en oblique),
3. Établir une bijection entre $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ (on pourra sauter les fractions qu'on aura déjà comptées).