Corrigé de l'exercice 2.6, question 2

Exercice 2.6 Soient E et F deux ensembles.

1. Un sous-ensemble X de $E \cup F$ est-il toujours de la forme $A \cup B$ avec $A \subset E$ et $B \subset F$?
2. Un sous-ensemble X de $E \times F$ est-il toujours de la forme $A \times B$ avec $A \subset E$ et $B \subset F$?

La demande de corrigé portait sur la question 2.

2. La réponse est non, un sous-ensemble d'un produit $E \times F$ n'est pas nécessairement le produit $A \times B$ d'une partie $A \subset E$ avec une partie $B \subset F$. En effet, on peut donner un contre-exemple comme suit. Prenons $E = F = [0, 1]$, l'intervalle réel. Alors $E \times F = [0, 1]^2$ qui est un carré de côté 1 dans $\mathbb{R}^2$. Prenons X égal au segment diagonal :

$$X = \{(x, y) \in [0, 1]^2;\ x = y\}.$$

Supposons qu'il existe $A \subset E$ et $B \subset F$ telles que $X = A \times B$ et montrons qu'on arrive à une contradiction.

D'abord, comme le point $(0, 0)$ appartient à X, puisqu'on a supposé $X \subset A \times B$ on déduit que $(0, 0) \in A \times B$. Ceci implique que $0 \in A$ (et également $0 \in B$ mais nous n'utiliserons pas ce fait). De même, le point $(1, 1)$ appartient à X, puisqu'on a supposé $X \subset A \times B$ on déduit que $(1, 1) \in A \times B$. Ceci implique que $1 \in B$ (et également $1 \in A$ mais nous n'utiliserons pas ce fait). On a montré que $0 \in A$ et $1 \in B$, donc par définition de ce qu'est l'ensemble produit $A \times B$, on a $(0, 1) \in A \times B$.

Comme on a supposé aussi que $A \times B \subset X$, ceci implique $(0, 1) \in X$ et c'est une contradiction : le point $(0, 1)$ n'est pas sur le segment diagonal.