Corrigé de l'exercice 2.3

Exercice 2.3 Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour qu'il existe une partie X de E telle que $A \cup X = B$? Déterminer alors toutes ces parties X.
2. Même question avec $A \cap X = B$.

1. D'abord on cherche une condition, dépendant de A et B, qui est nécessaire et suffisante pour qu'il existe $X \subset E$ telle que $A \cup X = B$. S'il existe une telle partie X, alors $A \subset (A \cup X) = B$, donc nécessairement $A \subset B$. Cette condition nécessaire est aussi suffisante car, réciproquement, si $A \subset B$, alors en prenant $X = B$ on voit que $A \cup X = A \cup B = B$.

Ensuite, on se place dans la situation où cette condition nécessaire et suffisante est vérifiée, et on souhaite trouver toutes les $X \subset E$ tels que $A \cup X = B$. (On sait déjà qu'il en existe au moins une, mais on veut maintenant les trouver toutes.) Après tâtonnements et réflexions, on arrive à la conclusion que les parties X recherchées sont les parties telles que $B \smallsetminus A \subset X \subset B$. Pour vérifier cela on est amené à montrer que :

$$\{X \subset E \text{ telle que } A \cup X = B\} = \{X \subset E \text{ telle que } B \smallsetminus A \subset X \subset B\}.$$

Démontrons d'abord l'inclusion « $\subset$ ». Soit $X \subset E$ telle que $A \cup X = B$. Pour démontrer que $B \smallsetminus A \subset X \subset B$ on peut procéder de différentes manières :

- « en passant par les éléments » :
  - si $b \in B \smallsetminus A$, comme $B = A \cup X$, on a $b \in X$;
  - si $x \in X$, comme $B = A \cup X$, on a $x \in B$;
- « sans passer par les éléments ».
  - $B \smallsetminus A \overset{def}{=} B \cap A^c = (A \cup X) \cap A^c = (A \cap A^c) \cup (X \cap A^c) = \varnothing \cup (X \cap A^c) = X \cap A^c \subset X$;
  - $X \subset A \cup X = B$.

Démontrons maintenant l'inclusion « $\supset$ ». Ici encore on peut procéder de différentes manières. Faisons seulement une méthode « sans passer par les éléments ». Soit $X \subset E$ telle que $B \smallsetminus A \subset X \subset B$. On observe que $A \cup (B \smallsetminus A) = A \cup (B \cap A^c) = (A \cup B) \cap (A \cup A^c) = (A \cup B) \cap E = B$, puisque $A \subset B$. En partant de $B \smallsetminus A \subset X \subset B$ et en prenant la réunion avec A, on trouve :

$$A \cup (B \smallsetminus A) \subset A \cup X \subset A \cup B.$$

L'observation qu'on vient de faire dit que la partie de gauche est B. Comme $A \subset B$, la partie de droite aussi est B. Finalement on a une chaîne d'inclusions dont les extrémités sont toutes égales à B, il s'ensuit que $A \cup X = B$.

2. On peut procéder de la même manière que précédemment, en prenant la question 2 comme une question indépendante. D'abord on doit trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $X \subset E$ telle que $A \cap X = B$. On voit que s'il existe une telle partie X, alors $B = A \cap X \subset A$ c'est-à-dire $B \subset A$. Cette condition est aussi suffisante, car si $B \subset A$, en prenant $X = B$ on obtient $A \cap X = A \cap B = B$ comme désiré.

Ensuite on suppose que $B \subset A$ et on recherche toutes les parties X telles que $A \cap X = B$. Après quelques recherches on se propose de démontrer que :

$$\{X \subset E \text{ telle que } A \cap X = B\} = \{X \subset E \text{ telle que } B \subset X \subset B \cup A^c\}.$$

Je ne rédige pas entièrement la fin de cette démonstration, en vous laissant ce soin. (Prière de me demander si vous souhaitez tous les détails ici.)

Plutôt, je propose une méthode différente qui consiste à remarquer qu'en passant au complémentaire, le signe d'intersection va être transformé en un signe de réunion de sorte que nous nous trouverons en quelque sorte ramené à la question précédente. Pour faire cela dans de bonnes conditions, il faut bien connaître les faits « élémentaires » suivants :

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
- $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$,
- $A \subset B$ si et seulement si $B^c \subset A^c$.

Avec ces choses en tête, on peut déduire la question 2 directement par équivalences. Tout d'abord, il existe $X \subset E$ telle que $A \cap X = B$ ssi il existe $X \subset E$ telle que $A^c \cup X^c = B^c$, ssi $A^c \subset B^c$ (d'après la Q1), ssi $B \subset A$.

On suppose ensuite cette condition nécessaire et suffisante vérifiée, on considère une partie $X \subset E$ quelconque et on écrit :

$$\begin{aligned} A \cap X = B \quad & \text{ssi } A^c \cup X^c = B^c \\ & \text{ssi } B^c \setminus A^c \subset X^c \subset B^c \\ & \text{ssi } B \subset X \subset (B^c \setminus A^c)^c. \end{aligned}$$

Comme $(B^c \setminus A^c)^c = (B^c \cap A)^c = B \cup A^c$, on obtient bien la condition $B \subset X \subset B \cup A^c$ comme ci-dessus.