Corrigé de l'exercice 2.12

Exercice 2.12 Si $f : E \to E$ est une application et $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on définit f^n par récurrence en posant :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, f^{n+1} = f^n \circ f.$$

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, f^{n+1} = f \circ f^n$.
2. Montrer par récurrence que si f est bijective, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, f^n est aussi bijective et que $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n$.

1. Initialisation : pour $n = 0$, on a d'une part $f^1 = f^0 \circ f = \mathrm{Id}_E \circ f = f$ par définition, et d'autre part $f \circ f^0 = f \circ \mathrm{Id}_E = f$ d'autre part. Les deux sont donc bien égaux.

Hérédité : supposons que pour un $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ on a $f^{n+1} = f \circ f^n$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} f^{n+2} &= f^{n+1} \circ f \quad \text{d'après la propriété qui définit les puissances de } f, \\ &= (f \circ f^n) \circ f \quad \text{par l'hypothèse de récurrence}, \\ &= f \circ (f^n \circ f) \quad \text{par associativité de la composition}, \\ &= f \circ f^{n+1} \quad \text{par définition des puissances de } f \text{, une fois encore.} \end{aligned}$$

Ceci démontre la propriété rau rang $n+1$, donc elle est héréditaire.

On a démontré que $f^{n+1} = f \circ f^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

2. La notation f^{-1} désigne la bijection réciproque de f, qui est supposée f bijective (sans quoi cette notation n'a pas de sens). Pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, on peut alors définir

$$g_n := (f^{-1})^n$$

de la même manière que ce qui est fait au début de l'énoncé de l'exercice (en particulier $g_0 = \mathrm{Id}_E$ et $g_1 = f^{-1}$ que nous noterons aussi g). La question 1 s'applique alors pour l'application f^{-1} et montre alors que $g_{n+1} = g \circ g_n$, ce que nous utiliserons ci-dessous.

Pour répondre à la question posée, nous allons démontrer par récurrence sur n la propriété

« f^n est bijective et sa bijection réciproque est g_n ».

C'est équivalent à démontrer la propriété

« $f^n \circ g_n = g_n \circ f^n = \mathrm{Id}_E$ ».

Allons-y. Pour l'initialisation lorsque $n = 0$, on observe que f^0 et g^0 sont toutes les deux égales à Id_E par définition, si bien que les propriétés $f^0 \circ g_0 = g_0 \circ f^0 = \mathrm{Id}_E$ sont automatiques. Pour l'hérédité, supposons que pour un entier $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ on a $f^n \circ g_n = g_n \circ f^n = \mathrm{Id}_E$. Alors

$$\begin{aligned} f^{n+1} \circ g_{n+1} &= (f \circ f^n) \circ g_{n+1} \quad \text{d'après la question 1}, \\ &= (f \circ f^n) \circ (g_n \circ g) \quad \text{par définition de } g_{n+1}, \\ &= f \circ (f^n \circ g_n) \circ g) \quad \text{par associativité de la composition}, \\ &= f \circ \mathrm{Id}_E \circ g \quad \text{par l'hypothèse de récurrence}, \\ &= f \circ g = f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_E\,. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
g_{n+1} \circ f^{n+1} &= (g \circ g_n) \circ f^{n+1} \quad \text{d'après la question 1,} \\
&= (g \circ g_n) \circ (f^n \circ f) \quad \text{par définition de } f^{n+1}, \\
&= g \circ (g_n \circ f^n) \circ f) \quad \text{par associativité de la composition,} \\
&= g \circ \mathrm{Id}_E \circ f \quad \text{par l'hypothèse de récurrence,} \\
&= g \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E\,.
\end{aligned}$$

Nous avons terminé la démonstration de la propriété au rang $n+1$.