Corrigé de l'exercice 2.10

Exercice 2.10 1. Soient $f : E \to F$ et $g_1, g_2 : F \to G$ trois applications telles que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. A-t-on toujours $g_1 = g_2$? Et si f est injective ? Et si f est surjective ?

2. Soient $f_1, f_2 : E \to F$ et $g : F \to G$ trois applications telles que $g \circ f_1 = g \circ f_2$. A-t-on toujours $f_1 = f_2$? Et si g est injective ? Et si g est surjective ?

1. Non, on n'a pas toujours $g_1 = g_2$. Par exemple, considérons $E = F = G = \mathbb{R}$ avec $f(x) = \exp(x)$, $g_1(x)$, et $g_2(x) = |x|$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le nombre $\exp(x)$ est strictement positif donc égal à sa valeur absolue. Ainsi $(g_1 \circ f)(x) = \exp(x) = |\exp(x)| = (g_2 \circ f)(x)$. Donc $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. C'est un contre-exemple dans lequel f est injective, ce qui répond aux deux premières questions.

Remarque : on peut donner un exemple beaucoup plus simple en observant que si on choisit pour E un ensemble ayant un seul élément (on dit que E est un *singleton*), alors on a $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ pour n'importe quel choix de fonctions g_1, g_2. Je ne sais pas si un tel exemple est plus éclairant pour l'intuition (à vous de voir !).

En revanche, si f est surjective, il est vrai que $g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$. En effet, soit $y \in F$ un élément quelconque. Comme f est surjectif, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ceci entraîne

$$g_1(y) = g_1(f(x)) = (g_1 \circ f)(x) = (g_2 \circ f)(x) = g_2(f(x)) = g_2(y).$$

Comme c'est vrai pour tout y, alors $g_1 = g_2$.

2. Ici encore la réponse est non, et même si g est surjective. Prenons $E = F = \mathbb{R}$ et $G = \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Prenons $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$ et $g(x) = x^2$. Alors $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ (c'est la fonction $x \mapsto x^2$), mais $f_1 \neq f_2$ et dans cet exemple g est surjective.

Remarque : comme à la question précédente, on peut donner un exemple beaucoup plus simple en observant que si on choisit pour G un ensemble ayant un seul élément (un singleton), alors on a $g \circ f_1 = g \circ f_2$ pour n'importe quel choix de fonctions f_1, f_2.