Exercice 4.1

Le vecteur $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a-3b+2c \\ -2a+2b+2c \end{pmatrix}$.

Il est nul ssi $\begin{cases} a-3b+2c=0 & (L1) \\ -2a+2b+2c=0 & (L2) \end{cases}$

(L2) fournit $a=b+c$, et en injectant dans (L1) on trouve $-2b+3c=0$. Une solution est $b=3$, $c=2$ qui fournit $a=b+c=5$.

Exercice 4.3

1. Paramétrisation : $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -2+2\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

   (D'autres paramétrisations sont possibles !)

   Equation : $y = 2x-4$

2. $3y = 3\lambda - 3 = x-1-3 = x-4$ $\boxed{3y = x-4}$

3. L'équation $2x+3y+1=0$ fournit $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

   donc une paramétrisation est $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3} \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

Exercice 4.6

1. (a) L'égalité de barycentre s'écrit $2\overrightarrow{G_1P} + \overrightarrow{G_1Q} = \vec{0}$

   ou $3\overrightarrow{G_1O} = 2\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{QO}$

   $\boxed{3\overrightarrow{OG_1} = 2\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

   On déduit $\overrightarrow{OG_1} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$ d'où les coord. $G_1 \begin{pmatrix} 7/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$

   (b) De même $4\overrightarrow{OG_2} = -\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OQ} + 3\underbrace{\overrightarrow{OO}}_{=\vec{0}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$

   Donc $\overrightarrow{OG_2} = \begin{pmatrix} 9/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}$

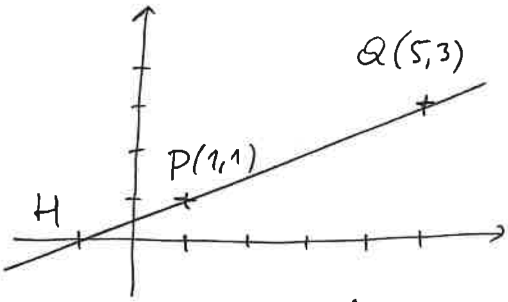
2. Ici l'égalité de barycentre s'écrit

$$(a+b)\overrightarrow{OH} = a\,\overrightarrow{OP} + b\,\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} a+5b \\ a+3b \end{pmatrix}$$

Puisque H a pour coord $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ on trouve $\begin{pmatrix} -a-b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5b \\ a+3b \end{pmatrix}$

c'est-à-dire $\begin{cases} -a-b = a+5b \\ 0 = a+3b \end{cases}$

ou encore $\begin{cases} 2a+6b=0 \\ a+3b=0 \end{cases}$.



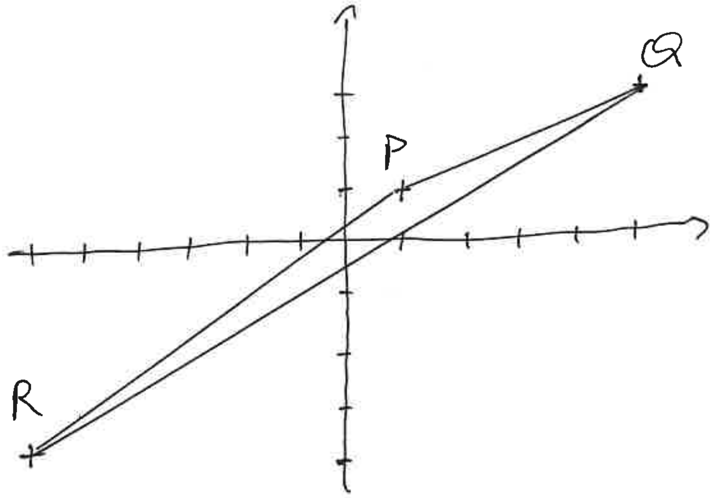
Ainsi $\underline{a=-3,\ b=1}$ est une solution

<u>Remarque</u> l'ensemble des barycentres de P et Q est la droite (PQ) privée des points P et Q. Dans notre cas la droite a pour équation $y = \frac{1}{2}(x+1)$ et on voit que le point H est dessus !

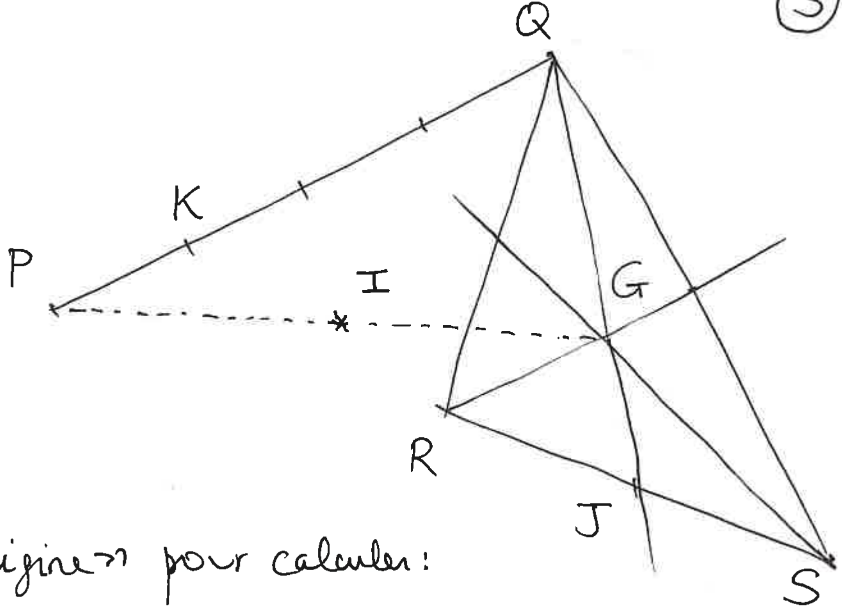
3. Le point O n'appartient pas à la droite (PQ) donc ce n'est pas un barycentre de (P, a) et (Q, b), quels que soient les poids a et b.

4. Dire que O = isobar(P, Q, R) (centre de gravité) c'est dire que $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{OR} = -\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$

on trouve $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$



Exercice 4.7



Le point Q semble central sur la figure : les points K, P
G, J
puis I
s'y relient facilement.

On le choisit comme « origine » pour calculer :

$$\vec{QG} = \frac{2}{3}\vec{QJ}$$ (propriété du centre de gravité situé aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane)

$$\vec{QK} = \frac{3}{4}\vec{QP}$$

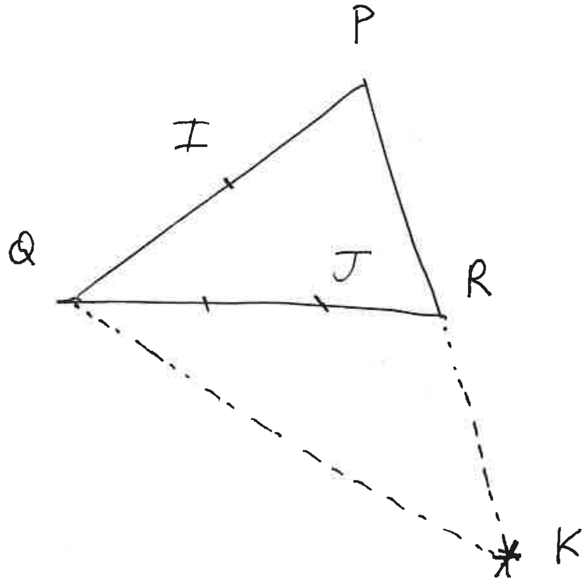
$$\vec{QI} = \frac{1}{2}(\vec{QP}+\vec{QG}) = \frac{1}{2}\left(\vec{QP}+\frac{2}{3}\vec{QJ}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(3\vec{QP}+2\vec{QJ}\right) = \frac{1}{6}\left(4\vec{QK}+2\vec{QJ}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(2\vec{QK}+\vec{QJ}\right)$$

Ceci démontre que I est le barycentre de (K, 2) et (J, 1), les points I, J, K sont donc alignés.

Exercice 4.9



On peut raisonner dans le triangle PQK :

par construction, R est le milieu de [PK] donc (QR) est la médiane en le sommet Q, et J est situé sur la médiane, aux $\frac{2}{3}$ de Q, donc c'est le centre de gravité du triangle PQK.

Il en découle que J appartient aux deux autres médianes, et en particulier à la médiane (KI).
Donc I, J, K sont alignés.

Pour une démonstration plus calculatoire, on peut écrire par exemple : $\overrightarrow{RK} = -\overrightarrow{RP}$ (1)

$\overrightarrow{RJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{RQ}$ (2)

donc $\overrightarrow{RI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{RK} + \frac{3}{2}\overrightarrow{RJ}$.

(utiliser (1)) (utiliser (2))

Ceci démontre que $I = bar((K, -1), (J, 3))$
donc I, J, K sont alignés.