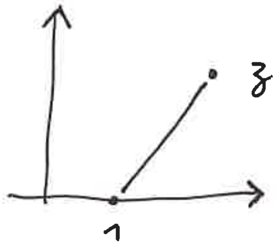
Exercice 3.10

(1)

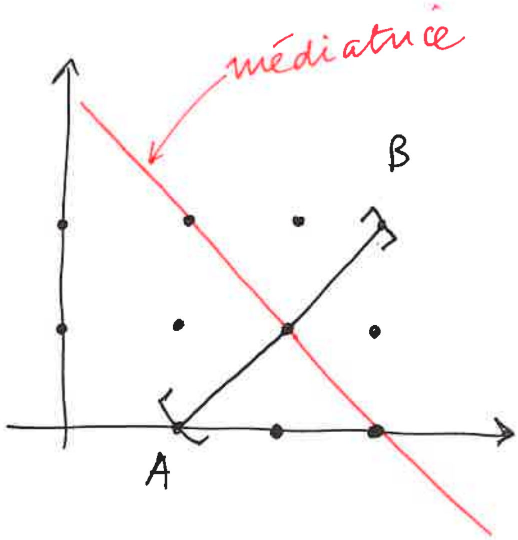
1. $|z-1|$ est la distance entre le point A d'affixe 1 et le point M d'affixe z.



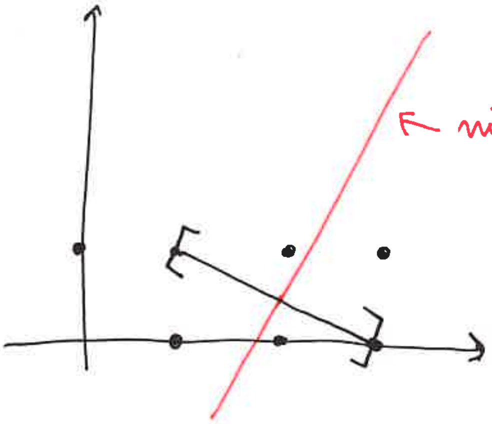
$|z-3-2i|$ idem avec le point B d'affixe $3+2i$

Donc $|z-1| = |z-3-2i| \iff AM = BM$

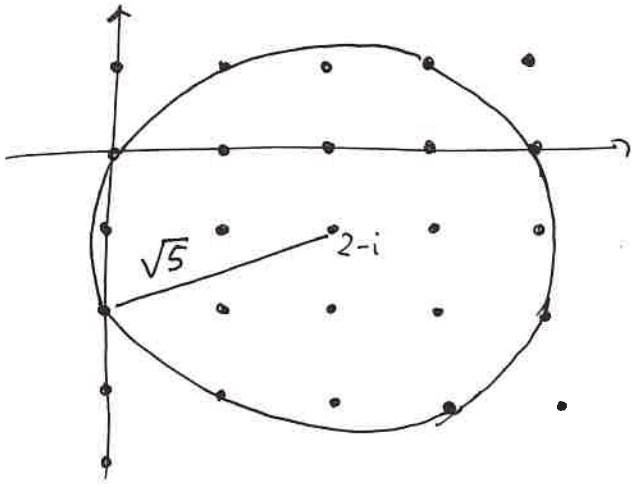
$\iff M \in$ Médiatrice de $[AB]$.



2.



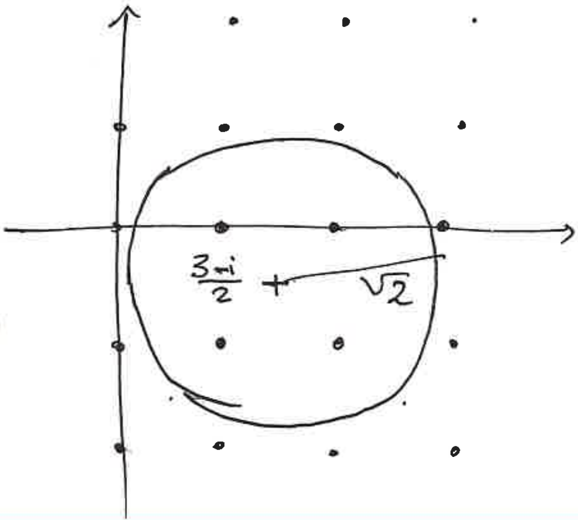
3.



4. $|(1+i)z - 2 - i| = 2$

$\iff \left|z - \frac{2+i}{1+i}\right| = \frac{2}{|1+i|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\iff \left|z - \frac{3-i}{2}\right| = \sqrt{2}$



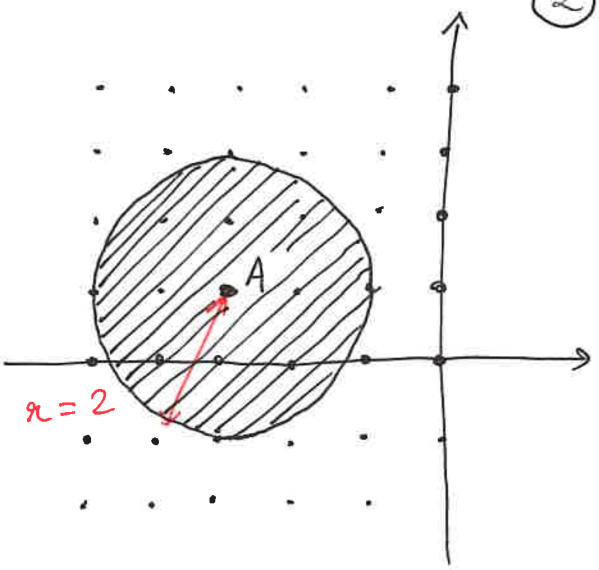
②

5. $M(z)$ $\quad A(-3+i)$

$|z+3-i| \leq 2 \iff AM \leq 2$

$\iff M \in \mathcal{D}(A,2)$

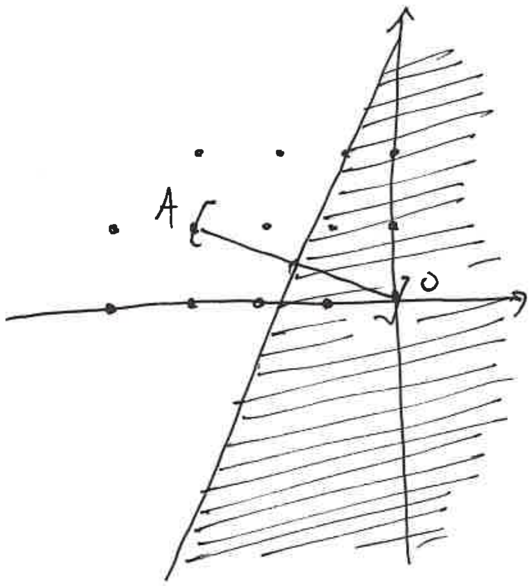
le disque de centre A et rayon 2.



6. Les points $M(z)$ qui vérifient $|z+3-i| = |z|$ sont les points de la médiatrice de $[AO]$ $\quad A(-3+i)$
O : origine

comme dans l'exercice, q1 et q2.

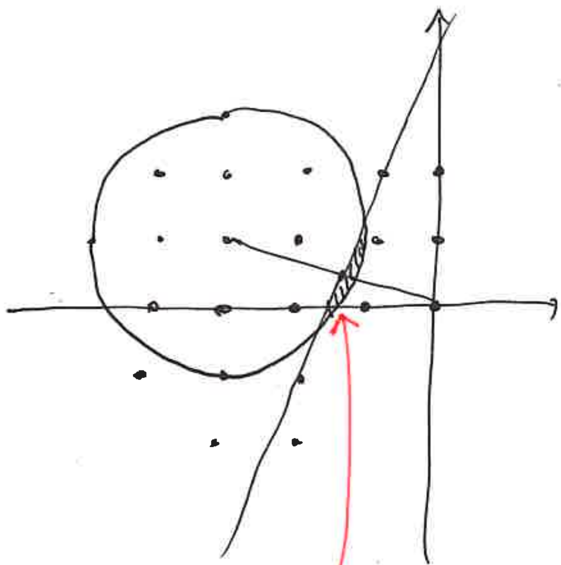
Les points tels que $|z+3-i| \geqslant |z|$ sont ceux du demi-plan délimité par la médiatrice et contenant O.



7. On analyse séparément les deux conditions :

$|z| < |z+3-i|$ $\quad$ et $\quad$ $|z+3-i| < 2$

cf question 6 $\qquad$ cf question 5.



Exercice 3.11

1. $5+12i = (x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy$ (on cherche $x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant cela.)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = 5 \\ x^2+y^2 = \sqrt{5^2+12^2} = 13 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 2 \\ xy \text{ du signe de } 12 \text{ (positif)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ et } y = 2 \\ \text{ou} \\ x = -3 \text{ et } y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x+iy \in \{3+2i \,;\, -3-2i\}.$$

2. Par la même technique :

$$1+4\sqrt{5}i = x^2-y^2+2ixy \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = 1 \\ x^2+y^2 = \sqrt{1+80} = 9 \\ 2xy = 4\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 5 \\ y^2 = 4 \\ xy > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{5} \\ y = \pm 2 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x+iy \in \{\sqrt{5}+2i \,,\, -\sqrt{5}-2i\}$$

3. Idem : on trouve $x+iy \in \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \,,\, -\sqrt{\frac{3}{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$

Autre méthode : $z = 1+i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$ a pour racines carrées $\pm\sqrt{2}\,e^{i\pi/6}$

Exercice 3.12

1. Les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $az^2+bz+c=0$ $(a,b,c \in \mathbb{C}$ fixés ; $a \neq 0)$

sont les nombres $\dfrac{-b \pm \delta}{2a}$ où δ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2-4ac$.

Pour l'équation $2z^2 - 6z + 5 = 0$ on trouve :

$\Delta = 36 - 40 = -4$ racines $\delta = \pm 2i$

d'où les racines $\frac{6+2i}{4} = \frac{3+i}{2}$ et $\frac{3-i}{2}$

2. Ici $\Delta = (9-7i)^2 - 20(2-6i) = 81 - 49 - 126i - 40 + 120i$

$= -8 - 6i$

Le calcul de racine carrée comme dans Ex 3.11 fournit

$\delta = 1 - 3i$ (ou $\delta = -(1-3i)$). Les racines sont

$$\frac{(7i-9)+(1-3i)}{10} = \frac{-4+2i}{5} \quad \text{et} \quad \frac{(7i-9)-1+3i}{10} = -1+i$$

3. Ici $\Delta = (2+i)^2 - 4(-1+7i) = 4 - 1 + 4i + 4 - 28i = 7 - 24i$.

Pour trouver une racine carrée $\delta = x + iy$ on résout $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} \\ xy < 0 \end{cases}$

càd $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \\ xy < 0 \end{cases}$ càd $\begin{cases} x^2 = 16 \\ y^2 = 9 \\ xy < 0 \end{cases}$

on trouve ainsi une racine : $\delta = 4 - 3i$

Les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{-2-i-4+3i}{2} = -3+i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2-i+4-3i}{2} = 1-2i$$

Exercice 3.13 Il s'agit d'une équivalence ; donc 2 implications.

Supposons que z_1 et z_2 sont les solutions de l'éq. $z^2 - sz + p = 0$.

Alors $z_1^2 - sz_1 + p = z_2^2 - sz_2 + p = 0$.

En particulier, $z_1^2 - z_2^2 = s(z_1 - z_2)$ donc $(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = s(z_1 - z_2)$.

Si $z_1 \neq z_2$ on peut simplifier et on obtient $\underline{s = z_1 + z_2}$.

On en déduit que $p = sz_1 - z_1^2 = (z_1 + z_2)z_1 - z_1^2 = \underline{z_1 z_2}$

C'est le résultat démandé.

Si $z_1 = z_2$, le discriminant est nul : $\Delta = s^2 - 4p = 0$.

Donc $p = \frac{s^2}{4}$, et $z_1^2 - sz_1 + p = z_1^2 - sz_1 + \frac{s^2}{4} = \left(z_1 - \frac{s}{2}\right)^2$.

On déduit $z_1 = \frac{s}{2}$ donc $s = 2z_1 = z_1 + z_2$ (car $z_1 = z_2$!).

et $p = \frac{s^2}{4} = \frac{s}{2} \cdot \frac{s}{2} = z_1 z_2$. Gagné !

Réciproquement, supposons que $z_1 + z_2 = s$ et $z_1 z_2 = p$.

Alors $z^2 - sz + p = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2 = (z - z_1)(z - z_2)$ donc

z_1 et z_2 sont les deux solutions de cette équation.

Exercice 3.14

1. Si z_1 et z_2 sont des racines cubiques ($= n^{\text{èmes}}$ avec $n = 3$) de $1+i$, posons $\xi = \frac{z_1}{z_2}$. Alors $\xi^3 = \frac{z_1^3}{z_2^3} = \frac{1+i}{1+i} = 1$, c'est-à-dire que ξ est une racine cubique de l'unité. En d'autres termes, pour trouver toutes les racines cubiques, on en trouve <u>une</u> et on la multiplie par toutes les racines cubiques de l'unité ξ pour les obtenir toutes.

Pour $z = 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$ on trouve facilement une racine cubique : $z_0 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\pi/12}$.

Posons $\varsigma = e^{2i\pi/3}$; les racines cubiques de 1 sont $1, \varsigma$ et ς^2.

Donc les racines cubiques de $1+i$ sont

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\pi/12} \; ; \quad \varsigma z_0 = \sqrt[6]{2}\, e^{i3\pi/4} \quad ; \quad \varsigma^2 z_0 = \sqrt[6]{2}\, e^{i17\pi/12}.$$

2. C'est pareil ; les racines $4^{\text{èmes}}$ de l'unité sont $1, i, -1, -i$.

Une racine $4^{\text{ème}}$ de $z = 4i = 4e^{i\pi/2}$ est $z_0 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/8}$.

Toutes les racines $4^{\text{èmes}}$ sont :

$$z_0 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/8}, \quad iz_0 = \sqrt{2}\, e^{i5\pi/8}, \quad -z_0 = \sqrt{2}\, e^{i9\pi/8}, \quad -iz_0 = \sqrt{2}\, e^{i13\pi/8}$$

3. Les racines $6^{\text{èmes}}$ de l'unité sont 1, $\varsigma = e^{2i\pi/6}$ et $\varsigma^2, \varsigma^3, \varsigma^4, \varsigma^5$.

On a $z = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i} = \dfrac{2e^{-2i\pi/3}}{\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}} = \sqrt{2}\, e^{13i\pi/12}$

dont une racine 6ème est $z_0 = \sqrt[12]{2}\, e^{13i\pi/72}$.

L'ensemble des racines $6^{\text{èmes}}$ de z est $\{z_0, \varsigma z_0, \varsigma^2 z_0, \dots, \varsigma^5 z_0\}$.

Exercice 3.15

1. Si $\alpha = m+in$ et $\beta = p+iq$ avec $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$

alors
$$\begin{cases} \alpha+\beta = \underbrace{(m+p)}_{\in\mathbb{Z}} + i\underbrace{(n+q)}_{\in\mathbb{Z}} \\ \alpha\beta = \underbrace{(mp-nq)}_{\in\mathbb{Z}} + i\underbrace{(mq+np)}_{\in\mathbb{Z}} \end{cases}$$
donc $\alpha+\beta \in \mathbb{Z}[i]$ et $\alpha\beta \in \mathbb{Z}[i]$.

2. Si $\alpha = m+in \in \mathbb{Z}[i]$ alors $|\alpha|^2 = m^2+n^2$ est un entier $\geqslant 0$, qui est nul seulement lorsque $m = n = 0$.

On en déduit que si $(m,n) \neq (0,0)$, cet entier m^2+n^2 est supérieur ou égal à 1 : $\begin{cases} |\alpha|^2 = 0 & \text{si } m=n=0 \\ |\alpha|^2 \geqslant 1 & \text{sinon} \end{cases}$

On en déduit que $|\alpha| \geqslant 1$ sauf lorsque $\alpha = 0$, auquel cas $|\alpha| = 0$.

3. Si $|m| \geqslant 1$ et $|n| \geqslant 1$ alors $m^2+n^2 \geqslant 2$ ne peut pas être égal à 1.
Il ne reste que les cas où : $m=0$ ou $n=0$.
Dans le 1er cas on trouve $n = \pm 1$, dans le second cas, $m = \pm 1$.
Finalement il y a quatre solutions :

$$(m,n) = (1,0) \text{ ou } (-1,0) \text{ ou } (0,1) \text{ ou } (0,-1).$$

4. Si $\alpha \neq 0$ vérifie $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ <u>et</u> $\alpha^{-1} \in \mathbb{Z}[i]$ alors comme on l'a vu, $|\alpha|^2$ est un entier $\geqslant 1$
et de même $|\alpha^{-1}|^2$ —— " ——.

Or $1 = \alpha\alpha^{-1} \Rightarrow 1 = |\alpha|^2 |\alpha^{-1}|^2$ ce qui montre que le produit de ces entiers $\geqslant 1$ est 1 : la seule solution est

$$|\alpha|^2 = |\alpha^{-1}|^2 = 1. \qquad [|\alpha^{-1}|^2 = 1 \text{ est redondant}]$$

Si $\alpha = m+in$, ceci s'écrit $m^2+n^2 = 1$ donc, comme vu en question 3, $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$ ou $\alpha = i$ ou $\alpha = -i$.

Réciproquement, si $\alpha \in \{1,-1,i,-i\}$
alors $\alpha^{-1} \in \{1,-1,-i,i\}$ est aussi dans $\mathbb{Z}[i]$.

Les inversibles recherchés sont donc $\{1,-1,i,-i\}$.

Exercice 3.16

1. Si $x = u+v$, on a $x^3 = u^3+v^3+3u^2v+3uv^2$
$$= u^3+v^3+3uv(u+v).$$

Ainsi : $x^3 \pm 51x + 104$ ssi
$$u^3+v^3+3uv(u+v) = 51(u+v)+104.$$

2. Si $uv = 17$, on a d'une part $3uv(u+v) = 51(u+v)$
et d'autre part $u^3v^3 = 17^3 = 4913$.

Utilisant la question 1., on voit que dans ce cas
$x^3 = 51x+104$ ssi $u^3+v^3 = 104$.
Puisque $u^3v^3 = 4913$, on peut appliquer le résultat de l'exercice 3.13 qui dit que u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation $X^2 - sX + p = 0$ avec $\begin{cases} s = u^3+v^3 = 104 \\ p = u^3v^3 = 4913 \end{cases}$

c'est-à-dire l'équation $X^2 - 104X + 4913 = 0$. $(\star)$

3. On résout $(\star)$: $\Delta = 104^2 - 4\times 4913 = -8836 = -94^2$.

Solutions : $X_1 = \dfrac{104+94i}{2} = 52+47i$

$X_2 = \dfrac{104-94i}{2} = 52-47i$.

NB on apprend parfois que les solutions de $ax^2+2b'x+c=0$ sont $-b' \pm \sqrt{\Delta'}$ avec $\Delta' = b'^2 - ac$. C'est utile ici !

Montrons que X_1 et X_2 sont des cubes d'entiers de Gauss. On cherche donc $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que
$$52+47i = (a+ib)^3 = a^3+3a^2ib-3ab^2-ib^3 = (a^3-3ab^2)+i(3a^2b-b^3)$$
$\begin{cases} 52 = a(a^2-3b^2) \\ 47 = b(3a^2-b^2) \end{cases}$ Comme 47 est un nombre premier,

L'égalité $47 = b(3a^2-b^2)$ implique $b=\pm 1$ ou $b=\pm 47$.
En essayant $b=1$ on trouve $47 = 3a^2-1$ donc $a^2=16$ et $a=4$. On vérifie que $4+i$ convient :

$$(4+i)^3 = 52+47i.$$

En prenant les conjugués on a : $(4-i)^3 = 52-47i$.
Donc X_1, X_2 sont les cubes de $4+i, 4-i \in \mathbb{Z}[i]$.

4. Nous avons vu que les solutions de (☆) sont
$X_1 = (4+i)^3$ et $X_2 = (4-i)^3$.
La question 2 nous a appris que les solutions de (☆) sont aussi u^3 et v^3, ce qui signifie que

$$\begin{cases} u^3 = (4+i)^3 \\ v^3 = (4-i)^3 \end{cases} \quad \text{ou l'inverse} \quad \begin{cases} u^3 = (4-i)^3 \\ v^3 = (4+i)^3 \end{cases}$$

qui est la même chose qu'à échanger u et v.

Alors $\left(\frac{u}{4+i}\right)^3 = 1 = \left(\frac{v}{4-i}\right)^3$, càd que $\frac{u}{4+i}$ et $\frac{v}{4-i}$ sont des racines cubiques de l'unité. On peut continuer pour résoudre entièrement l'équation en u et v, mais comme la question est simplement de trouver une solution entière, on peut simplement constater

que $\underline{\underline{x = (4+i)+(4-i) = 8 \quad \text{est solution}}}$:
$8^3 = 512 = 51 \times 8 + 104.$