Matthieu Romagny

# Feuille 1, corrigé exercices 1.12 et 1.13

**Exercice 1.12.** *Montrer par récurrence que pour tout réel positif $x$ et pour tout entier naturel $n$, on a $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.*

Démontrons ceci par récurrence sur $n$ ; c'est-à-dire considérons $P(n)$ : « pour tout réel positif $x$ on a $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ ».

Initialisation. Pour $n=0$, on a $(1+x)^n = (1+x)^0 = 1 \geqslant 1+0 = 1+nx$ donc l'inégalité a bien lieu.

Hérédité. Supposons que pour un $n \geqslant 0$ on a, pour tout réel positif $x$, l'inégalité $(1+x)^n \geqslant 1+nx$. Alors en multipliant celle-ci par $(1+x)$ qui est strictement positif, on obtient l'inégalité

$$(1+x)^{n+1} \geqslant (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2.$$

Comme $nx^2 \geqslant 0$, on en déduit que $(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x$. Ceci établit l'inégalité à démontrer au rang $n+1$. Par récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n$.

**Exercice 1.13.** Dans une somme de la forme $1+2+3+\cdots+n$, le nombre de termes additionnés est égal à $n$. La convention habituelle en mathématiques est de considérer que pour $n=0$, la somme possède 0 termes et est donc nulle (convention : une somme de 0 termes vaut 0 ; convention similaire : un produit de 0 termes vaut 1). C'est cette convention qui fait que les expressions des questions 1 à 4 ont un sens lorsque $n=0$ et valent 0. Si on veut éviter les discussions sur cette convention, on peut démontrer les formules demandées pour $n \geqslant 1$ et c'est ce que je ferai dans ce corrigé.

1. Démontrer que pour $n \geqslant 1$, on a $1+3+5+\cdots+(2n+1) = (n+1)^2$. Fait en classe.

2. Démontrer que pour $n \geqslant 1$, on a $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Fait en classe.

3. Démontrer que pour $n \geqslant 1$, on a $1+4+9+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   Initialisation. Pour $n=1$, la somme de gauche vaut 1 et par ailleurs $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1(2+1)(2+1)}{6} = 1$ donc la formule est vraie.
   Hérédité. Supposons que $1+4+9+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. En ajoutant $(n+1)^2$ de part et d'autre, on trouve $1+4+9+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$. Or

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}\\ &= \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

   On reconnaît la formule que l'on souhaite au rang $n+1$, donc la propriété est vraie pour tout $n$.

4. Démontrer que pour $n \geqslant 1$, on a $-1+4-9+\cdots+(-1)^n n^2 = (-1)^n\frac{n(n+1)}{2}$.
   Initialisation. Pour $n=1$, la somme de gauche vaut $-1$ et par ailleurs $(-1)^n\frac{n(n+1)}{2} = (-1)\frac{1(1+1)}{2} = -1$ donc la formule est vraie.

Hérédité. Supposons que $-1+4-9+\cdots+(-1)^n n^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$. En ajoutant $(-1)^{n+1}(n+1)^2$ de part et d'autre, on obtient $-1+4-9+\cdots+(-1)^n n^2+(-1)^{n+1}(n+1)^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}+(-1)^{n+1}(n+1)^2$. Or

$$\begin{aligned}(-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 &= (-1)^{n+1} \frac{-n(n+1)+2(n+1)^2}{2} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{-n(n+1)+2n^2+4n+2}{2} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{n^2+3n+2}{2} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

On reconnaît la formule que l'on souhaite au rang $n+1$, donc la propriété est vraie pour tout $n$.

5. Démontrer que pour $n \geqslant 1$, on a $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Initialisation. Pour $n=1$, la somme de gauche vaut $\frac{1}{2}$ et par ailleurs $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}$ donc la formule est vraie.

Hérédité. Supposons que $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$. En ajoutant $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ de part et d'autre, on obtient $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Or

$$\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

On reconnaît la formule que l'on souhaite au rang $n+1$, donc la propriété est vraie pour tout $n$.