AG1
Gr 1

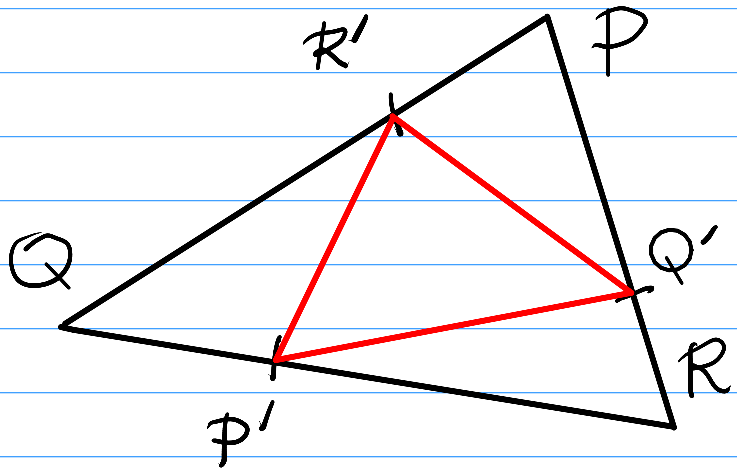
TD du vendredi 5 novembre

Exercice 4.13 Soient $\{P, Q, R\}$ un triangle et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a + b \neq 0$. Soient P' le barycentre de (Q, a) et (R, b), Q' le barycentre de (R, a) et (P, b) et R' le barycentre de (P, a) et (Q, b). Montrer que les triangles $\{P, Q, R\}$ et $\{P', Q', R'\}$ ont même centre de gravité.

Indication : calculer
(iso)bar$(P', Q', R') := \mathrm{bar}((P', 1), (Q', 1), (R', 1)) = \cdots$

Triangle scalène : quelconque.

Supposons $a > b > 0$ pour le dessin.



$$\mathrm{bar}(P', Q', R') = \mathrm{bar}((P', a+b), (Q', a+b), (R', a+b))$$

$$= \mathrm{bar}(\underline{(Q, a)}, \underline{(R, b)}, \underline{(R, a)}, \underline{(P, b)}, \underline{(P, a)}, \underline{(Q, b)})$$

associativité

$$= \mathrm{bar}((P, a+b), (Q, a+b), (R, a+b))$$

encore

$$= \mathrm{bar}(P, Q, R)$$ comme demandé.

Si on laisse poids 1, 1, 1 :

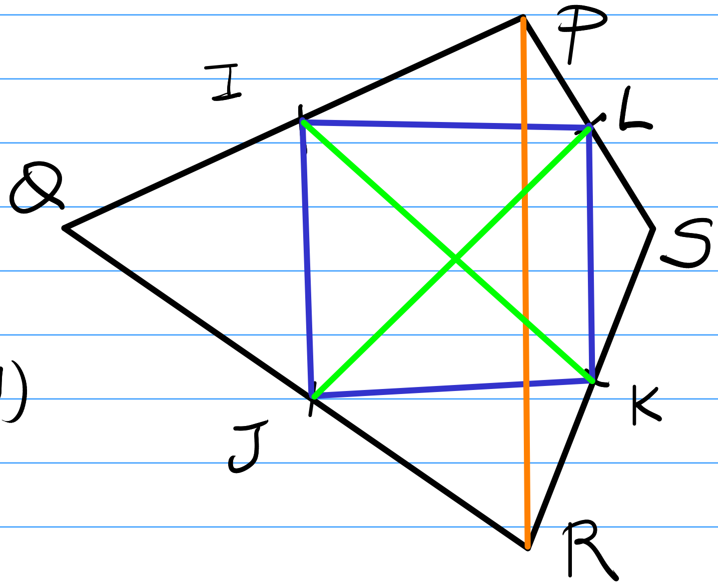
$$\mathrm{bar}((P', 1), (Q', 1), (R', 1)) = \mathrm{bar}\left(\left(Q, \frac{a}{a+b}\right), \left(R, \frac{b}{a+b}\right), \ldots\right)$$

$\equiv$

somme poids $= 1$

Exercice 4.14 Démontrer le théorème de Varignon : si P, Q, R, S sont quatre points quelconques et I, J, K, L les milieux respectifs de $\{P, Q\}$, $\{Q, R\}$, $\{R, S\}$ et $\{S, P\}$, alors (I, J, K, L) est un parallélogramme.

Soit O un point qcq.



On a :

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right) \\ \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}\right)\end{array}\right\} (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS}\right) \\ \overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OP}\right)\end{array}\right\} (2)$$

(1) on soustrait : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

(2) idem $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

On a obtenu $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ donc $IJKL$ est un parallélogramme.

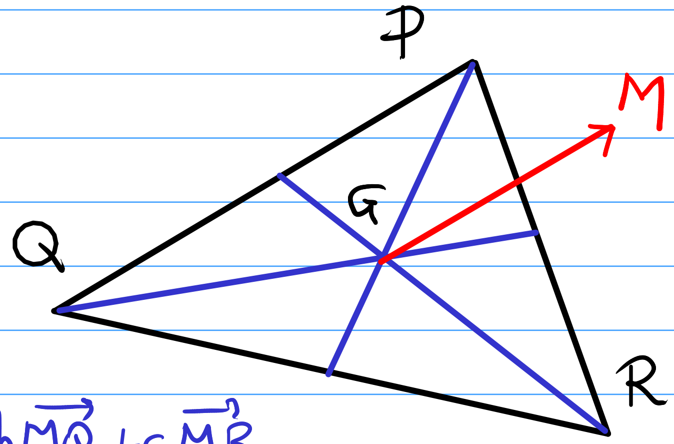
Autre tentative de démo:

$$\mathrm{bar}(P, Q, R, S) = \mathrm{bar}((I,2),(K,2)) = \mathrm{mil}[IK]$$
$$= \mathrm{bar}(P, S, Q, R) = \mathrm{bar}((L,2),(J,2)) = \mathrm{mil}[LJ]$$

Donc le quadrilatère $IJKL$ a ses diag. qui se coupent en leur milieu, donc c'est un parallélogramme.

Exercice 4.15 Soit $\{P, Q, R\}$ un triangle. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que le vecteur $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{PQ}$.

Quelle idée pour partir ?



Indic. : l'expression

$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR}$

fait penser à ... $a\overrightarrow{MP} + b\overrightarrow{MQ} + c\overrightarrow{MR}$ ...

On pourrait introduire le point ...

$$G \overset{df}{=} \text{bar}(P, Q, R),$$

on a alors $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR} = 3\overrightarrow{MG}$ pour tout point M du plan

Donc $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR}$ colinéaire à $\overrightarrow{PQ}$

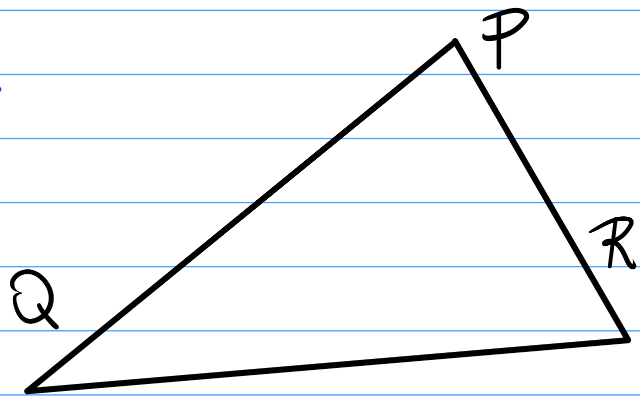
se réécrit : $3\overrightarrow{MG} = k\,\overrightarrow{PQ}$ $(k \in \mathbb{R})$

Ceci signifie que M appartient à la droite passant G, de vecteur directeur $\overrightarrow{PQ}$ (la parallèle à (PQ) par G).

Exercice 4.16 Soit $\{P, Q, R\}$ un triangle.

1. Déterminer l'ensemble A des valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le barycentre G_m de $(P, 1)$, (Q, m) et $(R, -1)$ est bien défini. Déterminer ensuite l'ensemble des points G_m lorsque m décrit A.
2. Même question avec $(P, 1)$, (Q, m) et $(R, 1)$.

1. Le bar. d'un système pondéré est bien défini lorsque la somme des poids est $\neq 0$.



Ici la somme est

$1 + m + (-1) = m$ donc $A = \{m \in \mathbb{R} ;\ m \neq 0\} = \mathbb{R}^*$.

Indic : pouvez-vous donner un point de l'ensemble recherché ?

On sait que pour tout point O on a :

$$\underbrace{m}_{\text{somme des poids}} \overrightarrow{OG_m} = \overrightarrow{OP} + m\,\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR}$$

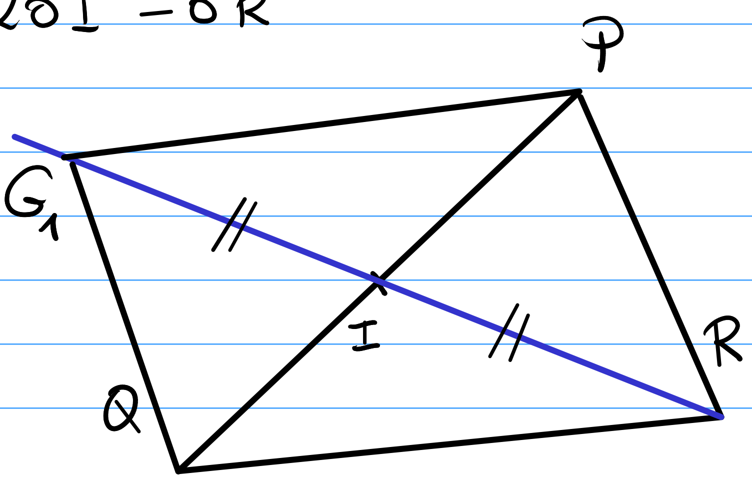
Pour $m = 1$: $\overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR}$ (pour tout O !)

$= 2\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OR}$

$G_1 = \mathrm{bar}((I,2),(R,-1))$

Prenons $O = I$

$\overrightarrow{IG_1} = -\overrightarrow{IR}$



$$m\overrightarrow{OG_m} = \overrightarrow{OP} + m\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{RP} + m\overrightarrow{OQ}$$

$$m\overrightarrow{OG_1} = m\overrightarrow{OP} + m\overrightarrow{OQ} - m\overrightarrow{OR} = m\overrightarrow{RP} + m\overrightarrow{OQ}$$

En soustrayant :

$$m\overrightarrow{G_1G_m} = m\overrightarrow{OG_m} - m\overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{RP} - m\overrightarrow{RP} = (m-1)\overrightarrow{PR}$$

$$m\overrightarrow{G_1G_m} = (m-1)\overrightarrow{PR}$$

Comme $m \neq 0$: $\underline{\overrightarrow{G_1G_m} = \frac{m-1}{m}\overrightarrow{PR}}$ $(m \in A)$

Donc G_m appartient à la parallèle à (PR) passant par G_1, qui est (G_1Q)

Notons $\underline{E = \{G_m \,;\, m \in A = \mathbb{R}^*\}}$, on a donc montré que $E \subset (G_1Q)$.

Réciproquement a-t-on $(G_1Q) \subset E$?

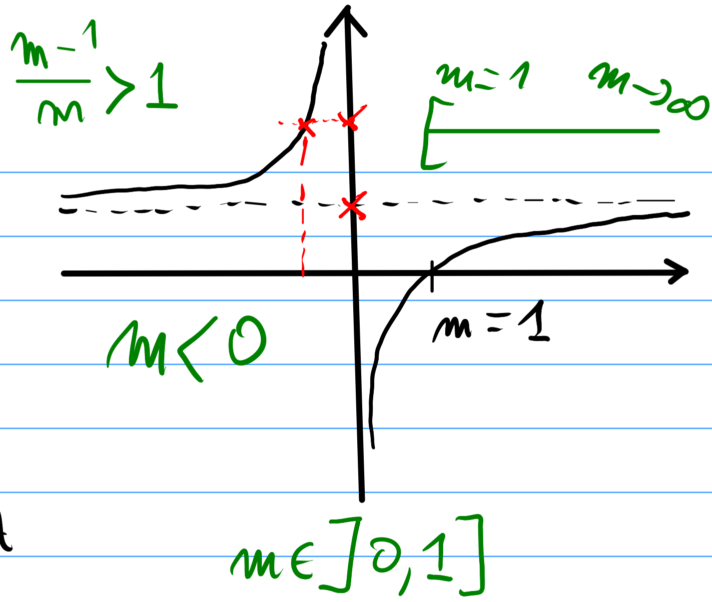
Obs : $\frac{m-1}{m} = 1 - \frac{1}{m} \neq 1$

ceci implique que $\overrightarrow{G_1G_m} \neq \overrightarrow{PR}$ càd $G_m = Q$

En fait $\frac{m-1}{m}$ peut prendre toute valeur réelle $\neq 1$, on peut le voir sur le graphe de la fonction $f(m) = \frac{m-1}{m}$.

C'est une homographie

Toute valeur $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ est atteinte, il suffit de résoudre $\frac{m-1}{m} = \lambda$



$$m-1 = \lambda m$$
$$m(1-\lambda) = 1$$
$$m = \frac{1}{1-\lambda} \quad \text{autorisé car } \lambda \neq 1.$$

On déduit que le seul point de la droite $(G_1 Q)$ qui n'est pas un bar. G_m est celui correspondant à $\lambda = 1$ dans

$$\overrightarrow{G_1 G_m} = \underbrace{\frac{m-1}{m}}_{\lambda} \overrightarrow{PR} = \lambda \overrightarrow{PR}$$

On voit que $E \subset (G_1 Q) \setminus \{Q\}$

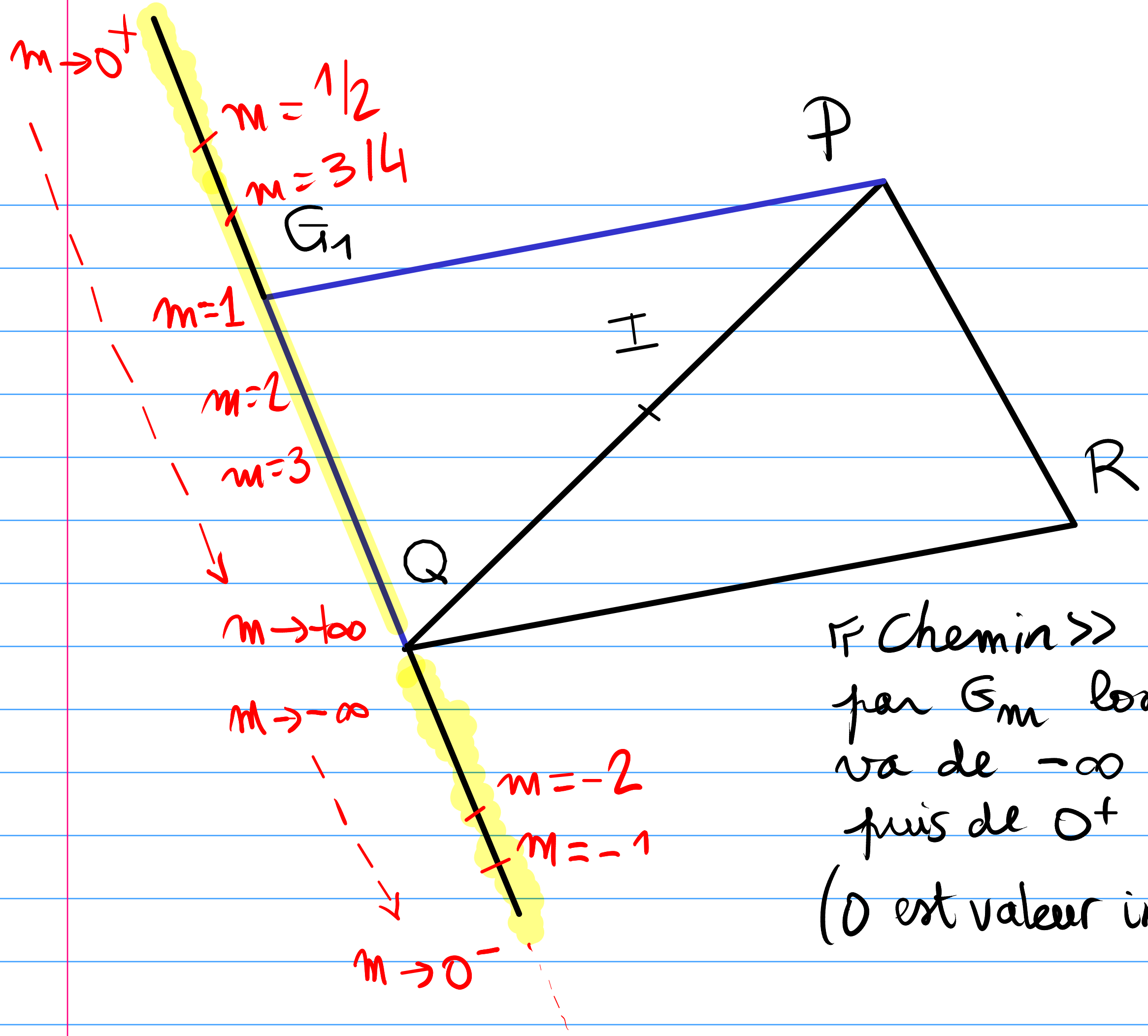
Réciproquement, si M est un point de $(G_1 Q)$ distinct de Q, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{G_1 M} = \lambda \overrightarrow{PR} \quad \text{avec } \lambda \neq 1$$

En prenant $m = \frac{1}{1-\lambda}$, on aura $\frac{m-1}{m} = \lambda$ donc

$$\overrightarrow{G_1 M} = \frac{m-1}{m} \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{G_1 G_m} \quad \text{càd } M = G_m.$$

Conclusion : $E = (G_1 Q) \setminus \{Q\}$



« Chemin » suivi par G_m lorsque m va de $-\infty$ à 0^- puis de 0^+ à $+\infty$ (0 est valeur interdite !)

Exercice 4.2 On considère les points $P\binom{3}{2}$, $Q\binom{2}{1}$, $R\binom{4}{-1}$ et $S\binom{-2}{-3}$. Calculez $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{SP}$ et vérifiez que $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{0}$.

On a failli oublier la question 2 de l'exercice 4.16. Préparez-la chez vous !