AG1
Gr 1

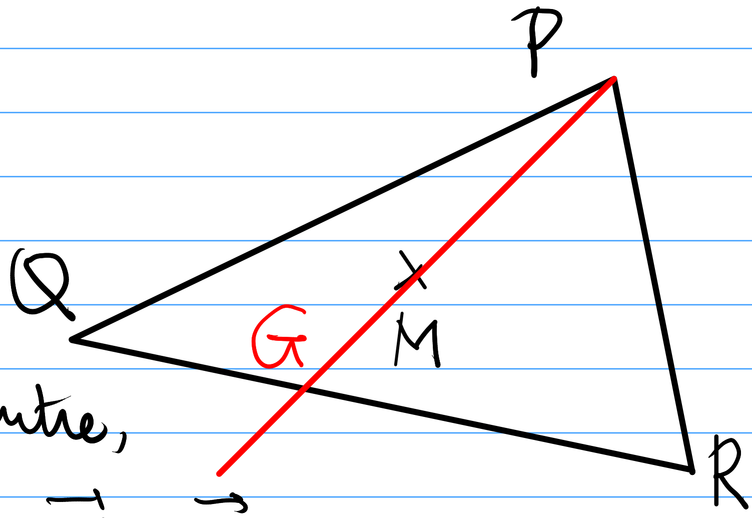
TD du jeudi 5 novembre

programme : 4.10 à 4.16 puis 4.2, 4.4, 4.5, 4.8

Exercice 4.10 Soient P, Q, R trois points non alignés et $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$ ou $c \neq 0$ tels que $a+b+c \neq 0$. Soit M le barycentre des points (P, a), (Q, b) et (R, c). Montrer que

1. si $b+c=0$, alors (PM) et (QR) sont parallèles,
2. si (PM) et (QR) sont sécantes en G, alors G est le barycentre de (Q, b) et (R, c).

On illustrera *systématiquement* les exercices par des figures.



1. Si $b+c=0$

alors $c=-b \neq 0$

Par déf. du barycentre,

$a\vec{MP}+b\vec{MQ}+c\vec{MR}=\vec{0}$.

On déduit $a\vec{MP}+\underbrace{b\vec{MQ}-b\vec{MR}}_{b(\vec{MQ}-\vec{MR})=b\vec{RQ}}=\vec{0}$

$a\vec{MP}+b\vec{RQ}=\vec{0}$

Comme $b \neq 0$, ça donne $\vec{RQ}=\frac{-a}{b}\vec{MP}$

donc (QR) et (MP) sont parallèles.

2. Si (QR) et (MP) sont sécantes, d'après 1. on a :

$b+c \neq 0$.

Notons $H = \mathrm{bar}((Q,b),(R,c))$

Proposition 4.3.4 Soient P, Q, R trois points du plan et $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a+b+c \neq 0$. Alors il existe un unique $G \in \mathcal{P}$ tel que

$$a\overrightarrow{GP} + b\overrightarrow{GQ} + c\overrightarrow{GR} = \overrightarrow{0}.$$

Si $a + b \neq 0$ et H est le barycentre de P et Q affectés des poids a et b alors G est le barycentre de H et R affectés des poids $a + b$ et c .

(Rappel du cours)

On a $M = \mathrm{bar}((P,a),\underbrace{(Q,b),(R,c)})$

$= \mathrm{bar}((P,a),(H,b+c))$ (cours ↑)

En particulier $M \in (PH)$

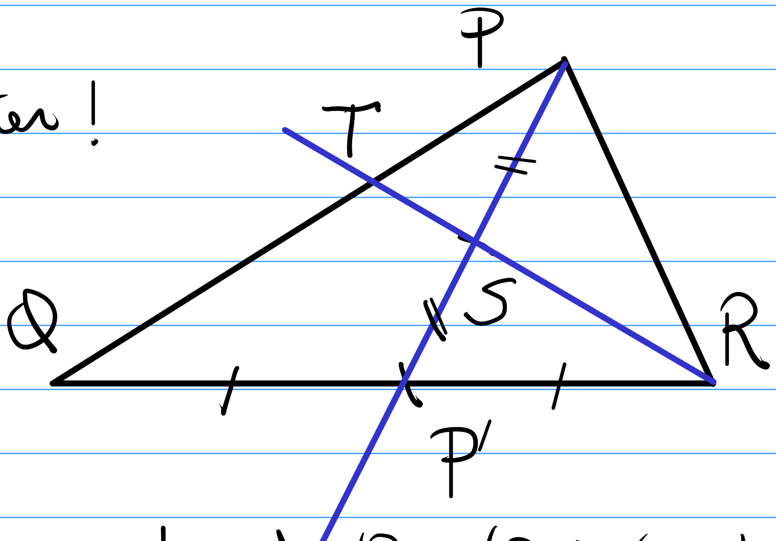
donc $H \in (PM) \cap (QR) = \{G\}$

donc $H = G$ ✓

Exercice 4.11 Soient P, Q, R trois points non alignés, P' le milieu de $\{Q, R\}$, S le milieu de $\{P, P'\}$ et T le point d'intersection de (PQ) et (RS).

1. Montrer que S est le barycentre de $(P, 2)$, $(Q, 1)$ et $(R, 1)$.
2. En déduire que T est le barycentre de $(P, 2)$ et $(Q, 1)$.

→ le milieu est un barycentre particulier !



1. Notons G le barycentre de $(P,2),(Q,1),(R,1)$.

Alors : $4\vec{OG} = 2\vec{OP} + \underline{1\times\vec{OQ} + 1\times\vec{OR}}$

$P' = \text{mil}([QR]) \Rightarrow 4\vec{OG} = 2\vec{OP} + 2\vec{OP'}$

$S = \text{mil}([PP']) \Rightarrow 4\vec{OG} = 4\vec{OS}$ donc $G = S$.
(cqfd)

Autre manière de répondre :

$S = \text{mil}[PP'] = \text{bar}((P,1),(P',1))$

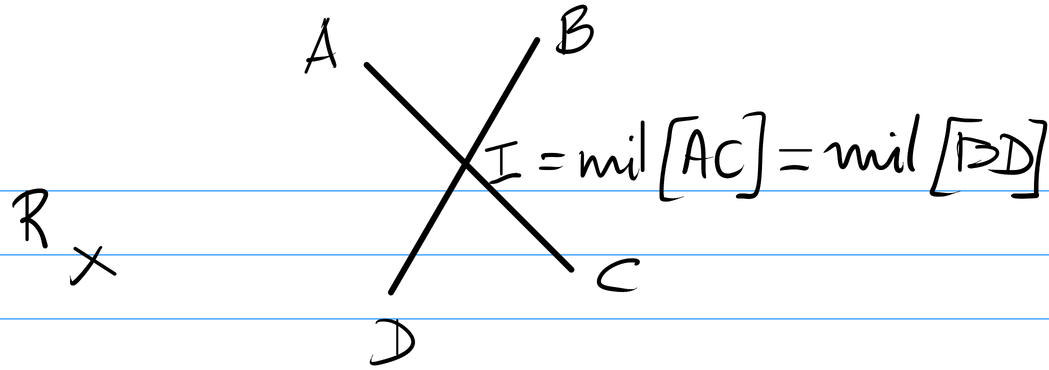
$= \text{bar}((P,1),(Q,\tfrac{1}{2}),(R,\tfrac{1}{2}))$ (associativité !)

$= \text{bar}((P,2),(Q,1),(R,1))$
(on peut mult. tous les poids par 2).

2. $S = \text{bar}((R,1),(T,x))$

Or $S = \text{bar}((R,1),(Q,1),(P,2)) = \text{bar}((R,1),(H,3))$.

brouillon



$$S = \text{bar}\big((R,1),(I,1)\big)$$
$$= \text{bar}\big((R,1),\underline{(A,\tfrac{1}{2}),(C,\tfrac{1}{2})}\big)$$
$$= \text{bar}\big((R,1),\underline{(B,\tfrac{1}{2}),(D,\tfrac{1}{2})}\big)$$

$H \in (PQ)$

$\Uparrow$

où on a noté H le barycentre de $(Q,1)$ et $(P,2)$

On a : $S = \text{bar}\big((R,1),(T,x)\big) = \text{bar}\big((R,1),(H,3)\big)$

Alors R, S, T et H sont alignés.

On a $H \in (PQ)$ et $H \in (RS)$

donc H est l'$\cap$ de (PQ) et (RS) : c'est T.

Ceci signifie que $T = H = \text{bar}\big((Q,1),(P,2)\big)$.

Autre solution :

Ecrire $\underline{\overrightarrow{SR} + x\,\overrightarrow{ST} = 2\overrightarrow{SP} + \overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{SR}} = \vec{0}$

$$S = \text{bar}\big((R,1),(T,x)\big) = \text{bar}\big((R,1),(Q,1),(P,2)\big)$$

Detail : $\begin{cases} \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR} + x\,\overrightarrow{OT} \\ \overrightarrow{OS} = 2\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} \end{cases}$ et soustraire.

$$\cancel{\vec{S}R} + x\overrightarrow{ST} = 2\overrightarrow{SP} + \overrightarrow{SQ} + \cancel{\overrightarrow{SR}}$$

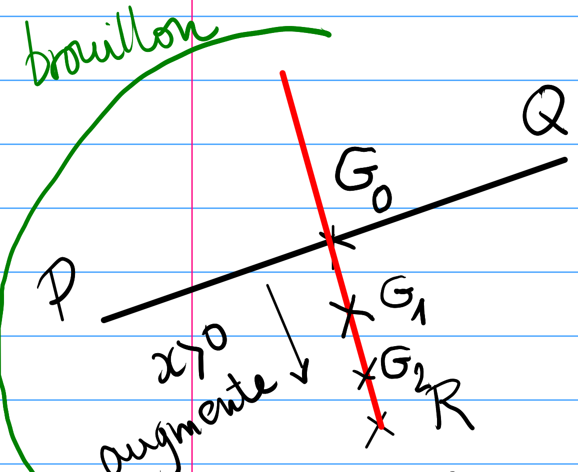
$$\overrightarrow{ST} = \frac{2}{x}\overrightarrow{SP} + \frac{1}{x}\overrightarrow{SQ}$$

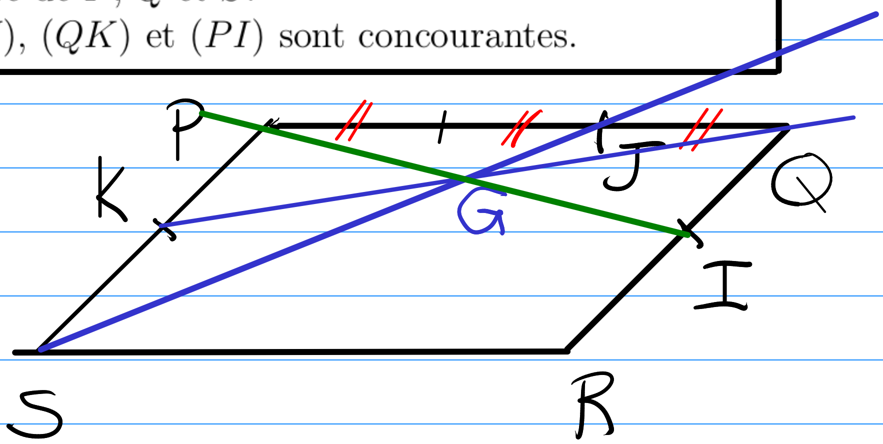
C'est la relation qui dit $T = \text{bar}\left(\left(P, \frac{2}{x}\right), \left(Q, \frac{1}{x}\right)\right)$ (écrite avec $O = S$).

<u>Rem</u> $x \neq 0$ car sinon on aurait $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR}$
donc $S = R$ impossible
car P, Q, R ne sont pas alignés.

Exercice 4.12 Soit (P, Q, R, S) un parallélogramme non aplati, K le milieu de $\{P, S\}$, I le milieu de $\{Q, R\}$ et J le point~~s~~ défini par $\overrightarrow{PJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$.

1. Exprimez K comme barycentre de P et S ainsi que J comme barycentre de P et Q.
2. Montrer que les droites (SJ) et (QK) sont sécantes en un point G que l'on exprimera comme barycentre de P, Q et S.
3. Montrer que les droites (SJ), (QK) et (PI) sont concourantes.





$G_x = \text{bar}((P,1),(Q,1),(R,x))$

1. $K = \text{mil}[PS] = \text{bar}((P,1),(S,1))$

$J = \text{bar}((P,1),(Q,2))$

le même !

2. Regardons $\text{bar}((P,1),(S,1),(Q,2)) =: G$

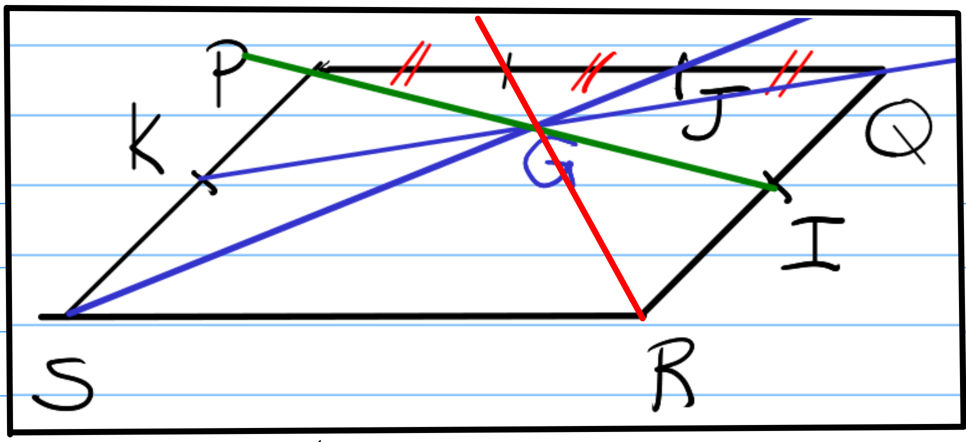
$= \text{bar}((K,2),(Q,2))$ (1)

$= \text{bar}((S,1),(J,3))$ (2)

On a $G \in (QK)$ grâce à (1)

(SJ) — " — (2)

et $G = \text{bar}((P,1),(S,1),(Q,2))$,



La figure
de
l'exercice

$G = \text{bar}\{(P,1),(S,1),(Q,2)\}$

$4\vec{PG} = \cancel{\vec{PP}} + \vec{PS} + 2\vec{PQ}$

$\vec{PG} = \frac{1}{4}\vec{PS} + \frac{1}{2}\vec{PQ} = \frac{1}{4}\vec{QR} + \frac{1}{2}\vec{PQ}$

Or $\vec{PS} = \vec{QR}$ (PQRS ▱-gramme)

$I = \text{mil}[QR] \Rightarrow \vec{PI} = \frac{1}{2}(\vec{PQ} + \vec{PR})$

$= \vec{PQ} + \frac{1}{2}\vec{QR}$

$= 2\vec{PG}$ ✓