TD du vendredi 4 décembre 2020

1. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (N'oubliez pas de démontrer les réponses !)
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, x + y \geqslant z$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \geqslant z$
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = z^2$
   (d) $\forall x \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C}, \exists y \in \mathbb{C}, x^2 + y^2 = z^2$

1. La négation est :

$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, x + y < z$.

Celle-ci est vraie, car :

Posons $x = 0$. Soit $y \in \mathbb{R}$ un réel.

Prenons $z = y + 1$. On a alors :

$$x + y = y < y + 1 = z \quad \text{cqfd.}$$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \geqslant z$.

C'est vrai car :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $z \in \mathbb{R}$. On doit montrer que $\exists y \in \mathbb{R}, x + y \geqslant z$.

$\Updownarrow$

$y \geqslant z - x$.

Posons $y \overset{\text{def}}{=} z - x$. Il vérifie bien :

$x+y=z\geqslant z$ comme on le voulait.

3. $\forall x\in\mathbb{R}, \forall z\in\mathbb{R}, \exists y\in\mathbb{R},\ x^2+y^2=z^2.$

$$\Updownarrow$$

$$y^2=z^2-x^2$$

C'est faux car :

Voici la négation :

$\exists x\in\mathbb{R}, \exists z\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R},\ x^2+y^2\neq z^2.$

Prenons $z=1$ et $x=2$. Alors pour tout $y\in\mathbb{R}$, $z^2-x^2=1-4=-3<0\leqslant y^2$

donc $x^2+y^2\neq z^2$.

4. $\forall x\in\mathbb{C}, \forall z\in\mathbb{C}, \exists y\in\mathbb{C},\ x^2+y^2=z^2.$

Vrai : Soit $x\in\mathbb{C}$. Soit $z\in\mathbb{C}$. On cherche $y\in\mathbb{C}$ tel que $x^2+y^2=z^2$,

càd : $\boxed{y^2=z^2-x^2.}$

éq de la forme $y^2=a$

⚠ Il n'existe pas de "symbole" $\sqrt{\ }$. pour les nombres complexes.

On sait par le cours que les équations du 2nd degré d'inconnue complexe
(et à coefs complexes)
ont des solutions.

2. Dans cet exercice, on exprimera toutes les réponses sous forme algébrique. On considère l'application

$$f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{iz}{z-i}.$$

(a) Calculer $f(1)$, $f(-1)$ et $f(1+i)$.

(b) Montrer qu'il existe un unique $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ que l'on déterminera tel que $f(z) = 2$.

(c) Montrer qu'il existe exactement deux $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ que l'on déterminera tels que $f(z) = z$.

$$f(z) = \frac{iz}{z-i}.$$

$z\bar{z} = |z|^2 = a^2+b^2$ (si $z = a+ib$)

(a) $$f(1) = \frac{i}{\underset{z}{1-i}} = \frac{i(1+i)}{\underset{z}{(1-i)}\underset{\bar{z}}{(1+i)}} = \frac{i-1}{2}$$

$$f(-1) = \frac{-i}{-1-i} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i+1}{2}$$

$$f(1+i) = \frac{i(1+i)}{1} = -1+i$$

(b) On cherche $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tel que

$$f(z) = 2 = \frac{iz}{z-i}.$$ Allons-y :

$$\frac{iz}{z-i} = 2 \iff iz = 2(z-i) = 2z - 2i$$

$$\iff (2-i)z = 2i$$

$$\iff z = \frac{2i}{2-i} = \frac{2i(2+i)}{5} = \frac{4i-2}{5}$$

$\leftarrow a^2+b^2$!

Le raisonnement par équivalence montre que $z = \frac{4i-2}{5}$ vérifie $f(z) = 2$ et que c'est le seul tel nombre complexe.

(c) $f(z) = z$ ssi $\frac{iz}{z-i} = z$. Résolvons :

$\frac{iz}{z-i} = z$ ssi $iz = z(z-i) = z^2 - iz$

ssi $z^2 - 2iz = 0$

ssi $z(z-2i) = 0$

ssi $z = 0$ ou $z = 2i$ $\boxtimes$

$\mathcal{S} = \{0 \,;\, 2i\}$.

(d) i. Montrer que
$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}, \quad f(z) - i = \frac{-1}{z-i}.$$

ii. En déduire que si un point M d'affixe $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ est sur le cercle de centre A d'affixe i et de rayon 1, alors le point M' d'affixe $f(z)$ s'y trouve aussi.

(e) i. Montrer la suite d'équivalences
$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}, \quad f(z) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow |z|^2 = \mathrm{Im}(z) \Leftrightarrow \left|z - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

ii. En déduire que les points M d'affixe $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tels que $f(z) \in \mathbb{R}$ forment un cercle $\mathcal{C}$ privé d'un point dont on donnera l'affixe du centre Ω ainsi que le rayon.

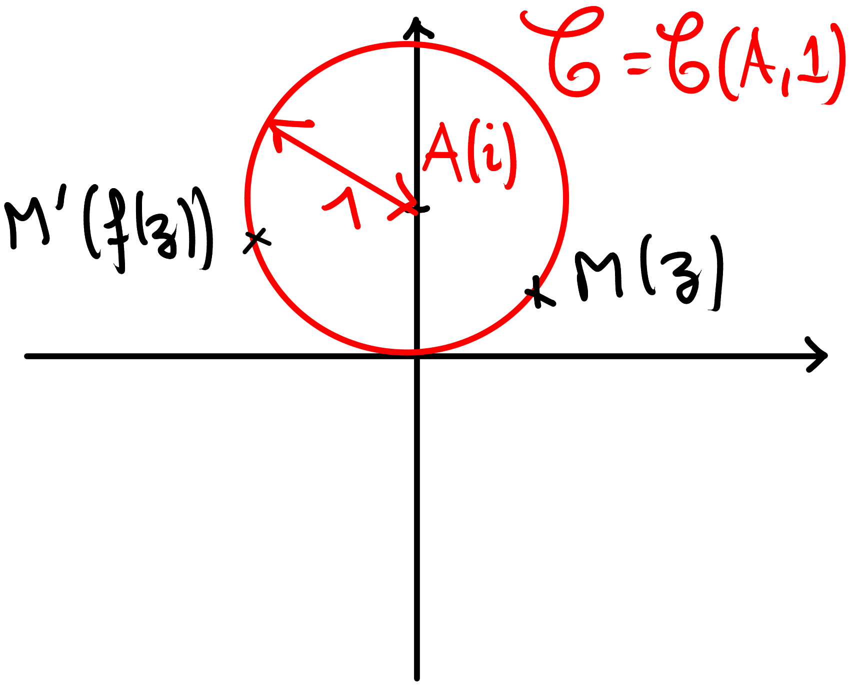
(d) i. Indic : que signifie, en termes d'affixes complexes, le fait que $M \in \mathcal{C}(A,1)$?

$M \in \mathcal{C}(A,1)$

$\Updownarrow$

$|z_M - z_A| = 1$

càd $|z - i| = 1$.



(On veut montrer que $M' \in \mathcal{C}$
càd $|f(z) - i| = 1$)

i. $f(z) - i = \dfrac{iz}{z-i} - i = \dfrac{iz - i(z-i)}{z-i} = \dfrac{-1}{z-i}$

comme c'était demandé.

ii. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tel que $M(z) \in \mathcal{C}(A, 1)$,

c'est-à-dire tel que $|z - i| = 1$.

Alors $|f(z) - i| = \left| \dfrac{-1}{z-i} \right|$ d'après i.

$= \dfrac{|-1|}{|z-i|}$ car $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

$= \dfrac{1}{|z-i|} = 1$ car $|z-i| = 1$.

ce qui démontre que $\underline{M'(f(z)) \in \mathcal{C}(A, 1)}$.

(d) i. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}, \quad f(z) - i = \frac{-1}{z-i}.$$

ii. En déduire que si un point M d'affixe $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ est sur le cercle de centre A d'affixe i et de rayon 1, alors le point M' d'affixe $f(z)$ s'y trouve aussi.

(e) i. Montrer la suite d'équivalences

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}, \quad f(z) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow |z|^2 = \mathrm{Im}(z) \Leftrightarrow \left|z - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

ii. En déduire que les points M d'affixe $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tels que $f(z) \in \mathbb{R}$ forment un cercle $\mathcal{C}$ privé d'un point dont on donnera l'affixe du centre Ω ainsi que le rayon.

(e) i. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a :

$$f(z) = \overline{f(z)} \iff \frac{iz}{z-i} = \frac{\bar{i}\,\bar{z}}{\bar{z}-\bar{i}} = \frac{-i\bar{z}}{\bar{z}+i}$$

$$\iff iz(\bar{z}+i) = -i\bar{z}(z-i)$$

$$\iff iz\bar{z} - z = -iz\bar{z} - \bar{z}$$

$$\iff 2iz\bar{z} = z - \bar{z}$$

$$= 2i\,\mathrm{Im}(z)$$

car : $z = a+ib$, $\bar{z} = a-ib$, $z-\bar{z} = 2ib = 2i\,\mathrm{Im}\,z$

$$\iff z\bar{z} = \mathrm{Im}\,z$$

$$\iff |z|^2 = \mathrm{Im}\,z$$

Il reste la deuxième équivalence à démontrer.