AG1
Gr 1

TD du jeudi 3 décembre 2020

Exercice 6.16 1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6a + 11b = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6a + 11b = 6$. (E)
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6a + 12b = 5$.

1. Cf feuille d'Axelle

2. Une sol. particulière est $(a_0, b_0) = (12, -6)$

Soit (E') : $6x + 11y = 0$

Une sol. (x,y) vérifie $6x = -11y$

Par lemme de Gauss, $\begin{cases} x = -11k \\ y = 6k \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$

Soit (a,b) sol de (E), on a :

$$6a + 11b = 6 = 6a_0 + 11b_0$$

donc $6\underbrace{(a-a_0)}_{x} + 11\underbrace{(b-b_0)}_{y} = 0$

(x,y) sol de (E').

D'après ce qui précède, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq

$$a - a_0 = x = -11k$$
$$b - b_0 = y = 6k.$$

Il reste à vérifier que ces couples (a,b) sont solutions.

Donc $\boxed{a = 12 - 11k, \; b = -6 + 6k, \; k \in \mathbb{Z}.}$

3. $6a + 12b = 5$

Ici $\text{pgcd}(6, 12) = 6$ ne divise pas 5,
donc il n'y a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$!

Exercice 6.17 Résoudre

$$a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \boxed{a \wedge b = 18} \text{ et } a \vee b = 360?$$

A-t-on la relation : $18\, n = 360$?

où $\boxed{n = \text{produit des facteurs premiers non communs à } a \text{ et } b.}$ (pas tout à fait)

Exemple : $a = 72 = \underbrace{4}\times\underbrace{18}$, $b = 90 = \underbrace{5} \times 18$

$\Rightarrow$ pgcd $= 18$ $\quad$ ppcm $= \dfrac{ab}{\text{pgcd}} = \dfrac{4 \times 18 \times 5 \times \cancel{18}}{\cancel{18}}$

et $n = 5$ aïe.

Indic : $a \wedge b = 18 \Longrightarrow \begin{cases} a = 18\, a' \\ b = 18\, b' \end{cases}$ $\quad a', b' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

avec a', b' premiers entre eux

(cours)

★★★ $\boxed{a \wedge b = d \Leftarrow \begin{cases} a = d a' \\ b = d b' \end{cases} \text{ avec } a' \wedge b' = 1}$

Pour nous $\begin{cases} a = 18 a' \\ b = 18 b' \end{cases}$ $\quad a' \wedge b' = 1$

(cours)

On utilise la relation $\boxed{ab = \text{pgcd} \times \text{ppcm}} = 18 \times \text{ppcm}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad // $

$18 a' \times 18 b'$

d'où $a \vee b = 18\, a'b' = 360$

$$\boxed{\begin{cases} a'b' = 20 = 2^2 \times 5 \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}}$$

Les diviseurs de 20 sont $1, 2, 4, 5, 10, 20$.

Les sol. sont $(a', b') \in \{(1, 20), (4, 5), (5, 4), (20, 1)\}$

La règle est : pour trouver un facteur a', quand on prend un facteur premier de 20, on le prend avec sa multiplicité.

Autre ex : $\begin{cases} a'b' = 2^3 \times 5^2 \times 7^4 \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$

les sol pour a' sont : 1, 2^3, 5^2, 7^4, $2^3 \times 5^2$, $2^3 \times 7^4$, $5^2 \times 7^4$, $2^3 \times 5^2 \times 7^4$.

Les solutions de l'équation proposée sont

$$\{(18, 360), (72, 90), (90, 72), (360, 18)\}$$

Exercice 6.18 On veut résoudre

$$a, b \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad \left\{ \begin{array}{l} a + b = 51 \\ a \vee b = 216. \end{array} \right. \tag{6.1}$$

1. Décomposer 51, 72 et 216 en produits de facteurs premiers.
2. Quel est le pgcd de 51 et 216 ?
3. Déterminer toutes les décompositions de 72 et 216 en produits d'entiers naturels premiers entre eux.
4. Montrer que si a et b sont solutions du système (6.1), alors leur pgcd divise celui de 51 et 216.
5. Conclure.

Voir feuille de Divi

Exercice 6.14 Peux-t-on mettre les nombres 1 à 30 dans les cases d'un tableau de 5 lignes et 6 colonnes de sorte qu'en additionnant les nombres de chaque colonne on trouve toujours la même somme ?

1	27	5	...		

$$S+S+S+S+S+S = 6S$$

$$\overset{?}{=} 1+2+3+\dots+30 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{30\times 31}{2} = 465$$

On ne peut pas avoir $465 = 6S$!

car 465 est impair.

Exercice 6.15 1. Montrer que si n est un entier quelconque, alors $8n+7$ et $6n+5$ sont toujours premiers entre eux.

2. Même question avec $2n+3$ et n^2+3n+2.
3. Même question avec $5^{n+1}+6^{n+1}$ et 5^n+6^n.

1. Lm Euclide :

$$\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(b, \overbrace{a \bmod b}^{\text{reste } r})$$

D.E. $8n+7 = (6n+5) \times \underbrace{1}_{q} + \underbrace{2n+2}_{r}$

$$6n+5 = (2n+2)\times 2 + 2n+1$$

$$2n+2 = (2n+1)\times 1 + \underbrace{1}_{= \text{pgcd}}$$

donc $\text{pgcd}(8n+7, 6n+5) = 1$ cqfd.

2. $2n+3$ et n^2+3n+2 ?

$$(2n+3)^2 = 4n^2 + 12n + 8 + 1$$
$$= 4(n^2+3n+2) + 1$$

$$\underbrace{(2n+3)}_{u} \times (2n+3) + \underbrace{(-4)}_{v}(n^2+3n+2) = 1 \quad \boxtimes$$