AG1
Gr 1

TD du jeudi 26 novembre 2020

Exercice 5.11 On considère les points suivants

$$P\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad Q\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse à la transformation qui envoie un point M du cercle Γ circonscrit au triangle $\{P, Q, R\}$ sur le barycentre M' des points $(P, 1), (Q, 1), (R, 1), (M, 3)$.

1. Montrer que Γ est le cercle de centre O et de rayon 1
2. Soit G le centre du gravité du triangle. Exprimer M' comme barycentre de G et de M.
3. Soit H le milieu de $\{G, O\}$. Montrer que M' est situé sur un cercle Γ' de centre H dont on déterminera le rayon.
4. On désigne par P', Q', R' les images des points P, Q, R respectivement par notre transformation. Montrer que Γ' est le cercle circonscrit au triangle $\{P', Q', R'\}$.

Voir la feuille de Divi !

Exercice 6.4

1. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le nombre $4^n + 2^n + 1$ est il divisible par 7 ?
2. Même question avec $9^n + 3^n + 1$ et 13.
3. Même question avec $25^n + 5^n + 1$ et 31.

3. On pose $u_n = 5^{2n} + 5^n + 1$

$$\Rightarrow u_{n+1} = u_n + 24 \times 5^{2n} + 4 \times 5^n$$

Car $u_n + 24 \times 5^{2n} + 4 \times 5^n = (5^{2n} + 5^n + 1) + 24 \times 5^{2n} + 4 \times 5^n$

$$= 25 \times 5^{2n} + 5 \times 5^n + 1 .$$

On a $u_{n+3} = u_n + 4 \times 5^n + 4 \times 5^{n+1} + 4 \times 5^{n+2}$
$+ 24 \times 5^{2n} + 24 \times 5^{2n+2} + 24 \times 5^{2n+4}$

$$= u_n + 4 \times 5^n \times (1 + 5 + 25) + 24 \times 5^{2n} (1 + 25 + 625)$$

$$(1+25+625) = 651 = 31 \times 21$$

$$= u_n + 31 \left(4 \times 5^n + 24 \times 5^{2n} \times 21\right)$$

Or $u_0 = 25^0 + 5^0 + 1 = 3$

$u_1 = 25 + 5 + 1 = 31$

$u_2 = 625 + 25 + 1 = 31 \times 21$

et $u_{n+3} \equiv u_n \mod 31 \Rightarrow$ $u_4 \equiv u_0$

$u_5 \equiv u_1$

$u_6 \equiv u_2$ etc

$$\boxed{\text{Conclusion : } u_n \equiv 0 \mod 31 \text{ ssi } n \equiv 1\ (3) \text{ ou } n \equiv 2\ (3)}$$

Exercice 6.7

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, 6^n \equiv 6 \mod 10$.
2. En déduire le chiffre des unités du nombre 123456^{789}.
3. Montrer que $56^6 \equiv 56 \mod 100$.
4. Quel est le chiffre des dizaines de 123456^{789}.

3. Rappel : formule du binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= a^n + \cdots + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \cdots + b^n$$

$1 \leqslant 1 \leqslant n-1$

a et b apparaissent

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 $\boxed{6\ 15\ 20\ 15\ 6}$ 1

$$56^6 = (50+6)^6 = 50^6 + \binom{6}{k} \underbrace{50 \times 6}_{} \times \cdots + 6^6$$

$300 \equiv 0 \mod 100$

$$\equiv \cancel{\underbrace{50 \times 50}_{\equiv 0} \times 50^4} + 6^6 \mod 100$$

$$\equiv 6^6 \mod 100 \quad \equiv 56 \mod 100$$

n	1	2	3	4	5	6
6^n mod 100	6	36	16	96	76	56

$(96 \equiv -4 \mod 100 \Rightarrow 6 \times 96 \equiv -24)$ (100)

Exercice 6.8 1. Déterminer les trois derniers chiffres de 49^2 et de 401^5 en utilisant la formule du binôme.

2. En déduire les trois derniers chiffres de 7^{20} puis de 7^{1001} ?

1. $49^2 = (50-1)^2 = 50^2 + 2\times 50 \times (-1) + 1$

$= 2500 - 100 + 1$

$= \underbrace{2401}$ trois derniers chiffres $= 401$

$401^5 = (400+1)^5$

$= \underbrace{\cancel{400^5}}_{\equiv 0 (1000)} + 5\times \cancel{400^4} + 10 \times \cancel{400^3} + 10 \times \cancel{400^2} + 5 \times \cancel{400} + 1$ $\quad 4 = 2\times 2$

$\equiv 1 \quad \text{mod } 1000$

Les trois derniers chiffres de 401^5 sont 001.

Rem : on a montré que $49^{10} = (49^2)^5 \equiv (401)^5 \equiv 1 \mod 1000$

2. Modulo 1000, on a :

$7^{20} = (7^2)^{10} = 49^{10} \equiv 1 \quad \text{mod } 1000$

$7^{1001} = 7^{1000+1} = 7^{20\times 50} \times 7 = (7^{20})^{50} \times 7 \equiv 7 \ (1000)$

$\rightarrow$ Ses 3 derniers chiffres sont 007

le matricule de James Bond !

(est-ce un hasard ?!?)

Exercice 6.9
1. Calculer le pgcd de 231868 et 8190. En déduire leur ppcm.
2. Même question avec 23145 et 17.
3. Même question avec 12345 et 678.

1. On fait l'algo. d'Euclide :

$$231868 = 8190 \times 28 + 2548$$
$$8190 = 2548 \times 3 + 546$$
$$2548 = 546 \times 4 + 364$$
$$546 = 364 \times 1 + \underbrace{182}_{\text{dernier reste non nul}}$$
$$364 = 182 \times 2 + 0$$

pgcd = 182

$$\text{pgcd} \times \text{ppcm} = 231868 \times 8190$$
$$= 182 \times 1274 \times 182 \times 45$$

d'où $\text{ppcm} = 45 \times 1274 \times 182 = \ldots$ (un truc.)

☆☆ $\boxed{\text{pgcd}(a,b) \times \text{ppcm}(a,b) = a \times b}$

2. et 3. Pgcd et ppcm de 23145 et 17.

Rem : 17 est premier ! ⇝ pgcd = 1 ou 17 (*)

Clémence : pgcd = 1 et ppcm = 393465

Algo d'Euclide : voir feuille de Clémence.

(*) donc il suffit de regarder 23145 mod 17 $\begin{cases} \text{si } 0 & \text{pgcd} = 17 \\ \text{sinon} & \text{pgcd} = 1 \end{cases}$

Exercice 6.10 Déterminer deux entiers u et v tels que

1. $23u + 35v = 1$,
2. $27u + 25v = 1$.

1. (On dit que (u,v) est un couple de Bézout pour $(23, 35)$).

Est-on sûre qu'il existe un couple (u,v) ?

Oui, d'après le th de Bézout, car $\text{pgcd}(23, 35) = 1$.

$$35 = 23 \times 1 + 12$$
$$23 = 12 \times 1 + 11$$
$$12 = 11 \times 1 + \underbrace{1}_{\text{pgcd}}$$
$$11 = 11 \times 1 + 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 = 12 - 11 \times 1 = 12 - (23 - 12 \times 1)$$
$$= 2 \times 12 - 23$$
$$= 2 \times (35 - 23) - 23$$
$$= \underbrace{2}_{v} \times 35 - \underbrace{3}_{u} \times 23$$

$$(u, v) = (-3, 2)$$

2. $27u + 25v = 1$

$$27 = 25 \times 1 + 2$$
$$25 = 2 \times 12 + 1$$
$$2 = 1 \times 2 + 0$$
$$1 = 25 - 2 \times 12 = 25 - 12 \times (27 - 25)$$
$$= 13 \times 25 - 12 \times 27$$

donc $(u_0, v_0) = (-12, 13)$ convient.

Soit (u,v) une autre solution ;

alors $27u+25v=1=27u_0+25v_0$

donc $27(u-u_0)=25(v_0-v)$ ☆

<u>Or</u> 25 et 27 sont premiers entre eux ;
d'après le lemme de Gauß,

$27 \mid (27(u-u_0)=) 25(v_0-v) \Longrightarrow 27 \mid v_0-v$

donc $\boxed{v_0-v=27\times k}$ pour un $k\in\mathbb{Z}$

On reporte : $\cancel{27}(u-u_0)=25\times\cancel{27}\times k$

$\boxed{u-u_0=25k}$

En conclusion $\begin{cases} u=u_0+25k=-12+25k \\ v=v_0-27k=13-27k \end{cases}$ $(k\in\mathbb{Z})$

sont toutes les solutions de l'équation.