AG1
Gr 1

TD du vendredi 20 novembre 2020

Exercice 6.4 1. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le nombre $4^n + 2^n + 1$ est il divisible par 7 ?
2. Même question avec $9^n + 3^n + 1$ et 13.
3. Même question avec $25^n + 5^n + 1$ et 31.

1. On a vu : si $4^n + 2^n + 1 \equiv 0 \ (7)$

(alors) $x \overset{\text{def}}{=} 2^n$ vérifie $x^2 + x + 1 \equiv 0 \ (7)$
ssi
(donc) (avec un tableau de valeurs de x^2+x+1)
ssi
nécess. $x \equiv 2$ ou $4 \mod 7$

1er cas $2^n \equiv 2 \ (7)$. On avait vu que ceci se produit exactement lorsque $\boxed{n \equiv 1 \ (3)}$

2ème cas $2^n \equiv 4 \ (7)$, se produit exactement lorsque $\boxed{n \equiv 2 \ (3).}$

Réciproquement, en regardant le tableau des puiss. de 2 :

si $n \equiv 1 \ (3)$ alors $2^n \equiv 2 \ (7)$

donc $4^n + 2^n + 1 \equiv 4 + 2 + 1 \equiv 0 \ (7)$

si $n \equiv 2 \ (3)$ alors $2^n \equiv 4 \ (7)$ $4^2 \equiv 16 \equiv 2 \ (7)$

donc $4^n + 2^n + 1 \equiv 2 + 4 + 1 \equiv 0 \ (7)$

Rem : si on est soigneux, càd si on vérifie qu'à chaque étape on a une équiv. plutôt qu'une simple implication, alors la réciproque est superflue (redondante !)

Rem bis : on peut aussi faire un tableau :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
4^n+2^n+1 (mod 7)	3	0	0	3	0	0	3	...	...

NB : $4^n = (2^n)^2$ $\qquad$ $1+1+1$

⚠ Il faut justifier que c'est périodique.

2. Quand a-t-on $9^n + 3^n + 1 \equiv 0 \ (13)$?

$9^n = (3^n)^2$, on pose $x = 3^n$

qui vérifie : $x^2 + x + 1 \equiv 0 \ (13)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x^2+x+1	1	3	7	0	8	5	4	5	8	0	7	3	1

n	0	1	2	3	4
3^n	1	3	9	1	3

... périodique car $3^3 \equiv 1\ (13)$

1) $3^n \equiv 3\ (13) \iff 3^{n+2} \equiv 1\ (13)$
(en mult. par 9)

joue le rôle de l'inverse de 3

$\iff n+2 \equiv 0\ (3)$

$\iff n \equiv 1\ (3)$

2) $3^n \equiv 9\ (13)$

$\iff 3^{n+1} \equiv 1\ (13)$
(en mult. par 3)

$\iff n+1 \equiv 0\ (3)$

$\iff n \equiv 2\ (3)$

Conclusion : $9^n + 3^n + 1 \equiv 0\ (13) \iff \begin{cases} n \equiv 1\ (3) \\ \text{ou} \\ n \equiv 2\ (3) \end{cases}$

3. Clément $x = 5$ ou 25 vont être « les » solutions

Rem tant qu'on travaille modulo un nb premier, l'éq. $x^2+x+1 \equiv 0 \ (p)$

$p \neq 2$

aura au plus deux solutions :

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

$$\text{ssi} \quad \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{-3}{4}$$

et on démontre $(\cdots)$ que le nombre $-3/4$ possède au plus 2 racines carrées

3. (Waly) on fait une trichotomie :

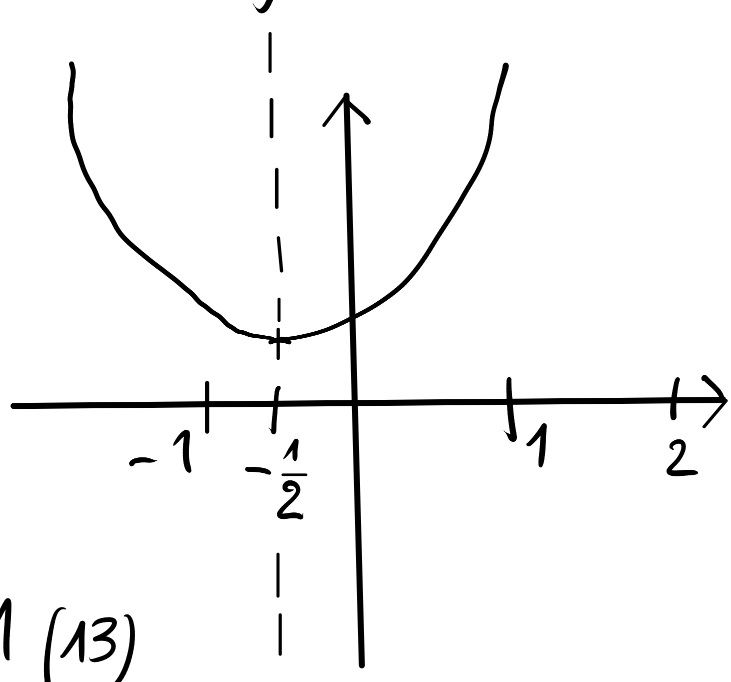
$n \equiv 0 \ (3) \qquad n = 3k$

$n \equiv 1 \ (3) \qquad n = 3k+1$

$n \equiv 2 \ (3) \qquad n = 3k+2 \ \ldots$

Rem (question de Clémence)

Graphique de x^2+x+1



dérivée : $2x+1$

nulle en $x = \frac{-1}{2}$

NB : $2 \times 7 \equiv 14 \equiv 1 \ (13)$

et $-7 \equiv 6 \ (13)$

1, 14, 27, 40, ...

On a $(-2) \times 6 \equiv 1 \ (13)$

6 est l'inverse de -2 : « $6 = \frac{1}{-2}$ »

Ceci explique la symétrie(*) constatée dans le tableau des valeurs de x^2+x+1

(*) par rapport à $x=6$

Exercice 6.5 Quel est le reste de la division euclidienne de 247^{349} par 7 ?

$247 = 35 \times 7 + 2$ donc $247 \equiv 2 \ (7)$

Alors $247^{349} \equiv 2^{349} \ (7)$.

Or : $349 = 3 \times 116 + 1$

car $2^3 \equiv 1 \ (7)$!

donc $2^{349} \equiv 2^{3\times 116 + 1} \equiv (2^3)^{116} \times 2^1 \equiv 2 \ (7)$

Conclusion $247^{349} \equiv 2^{349} \equiv 2 \ (7)$.

Exercice 6.6 Déterminer en fonction de la parité de l'entier naturel n le reste dans la division de $7^n + 1$ par 8.

$$7^2 = 49 = 6 \times 8 + 1 \equiv 1 \quad (8)$$

donc si n pair, $n = 2k$ $\quad 7^n = 7^{2k} = (7^2)^k \equiv 1^k \equiv 1 \mod (8)$

si n impair, $n = 2k+1$ $\quad 7^n = (7^2)^k \times 7 \equiv 7 \mod (8)$.

On déduit que

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{si } n \text{ est pair} & 7^n + 1 \equiv 2 \quad (8) \\ \text{si } n \text{ est impair} & 7^n + 1 \equiv 8 \equiv 0 \quad (8) \end{array}}$$

Rem ☆☆ comme $7^2 \equiv 1$ (8), pour les valeurs de $7^n \mod 8$ le n n'intervient que par son reste mod 2.

Exercice 6.7

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, 6^n \equiv 6 \mod 10$.
2. En déduire le chiffre des unités du nombre 123456^{789}.
3. Montrer que $56^6 \equiv 56 \mod 100$.
4. Quel est le chiffre des dizaines de 123456^{789}.

1. Récurrence sur $n \in \mathbb{Z}_{>0}$:

Initialisation : si $n=1$ on a $6^n = 6$ OK

Hérédité : si $6^n \equiv 6 \ (10)$

alors $6^{n+1} \equiv 6 \times 6 \equiv 36 \equiv 6 \ (10)$.

2. Comme $123456 \equiv 6 \ (10)$, on déduit de la q. 1 que $123456^{789} \equiv 6^{789} \underset{\text{q. 1}}{\equiv} 6 \mod 10$.

3. Indication : observez que dans le développement de $(50+6)^6 = \ldots$ beaucoup de termes seront nuls mod 100