AG1
Gr 1

TD du jeudi 19 novembre 2020

Exercice 5.10 Soient P, Q, R trois points quelconques. Déterminer (on fera un dessin !) les points M du plan tels que

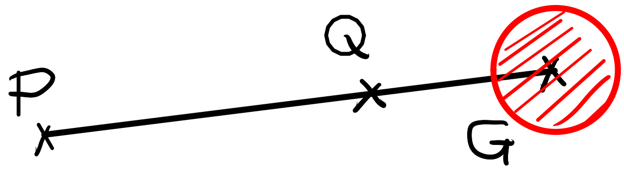
1. $\|\overrightarrow{MP} - 3\overrightarrow{MQ}\| \leq 2$,
2. $\|2\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{MR}\| = \|2\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{MR}\|$,
3. $\|\overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{MQ}\| = \|2\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MR}\|$.

1. $\underline{\overrightarrow{MP} - 3\overrightarrow{MQ}} = 3\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MP}$

$= 2\overrightarrow{QM} + \underbrace{\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MP}}$

$= 2\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{QP} \ldots$

$\overrightarrow{PG} = \frac{3}{2} PQ$



ZE REFLEXE :

Introduisons le bar. G des points pondérés $(P, 1)$ et $(Q, -3)$. On a alors :

$\underline{-2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OP} - 3\overrightarrow{OQ}}$ pour tout point O.

Pour O=M : $\overrightarrow{MP} - 3\overrightarrow{MQ} = -2\overrightarrow{MG}$

L'énoncé se réécrit : $\|-2\overrightarrow{MG}\| \leq 2$

càd $MG \leq 1$

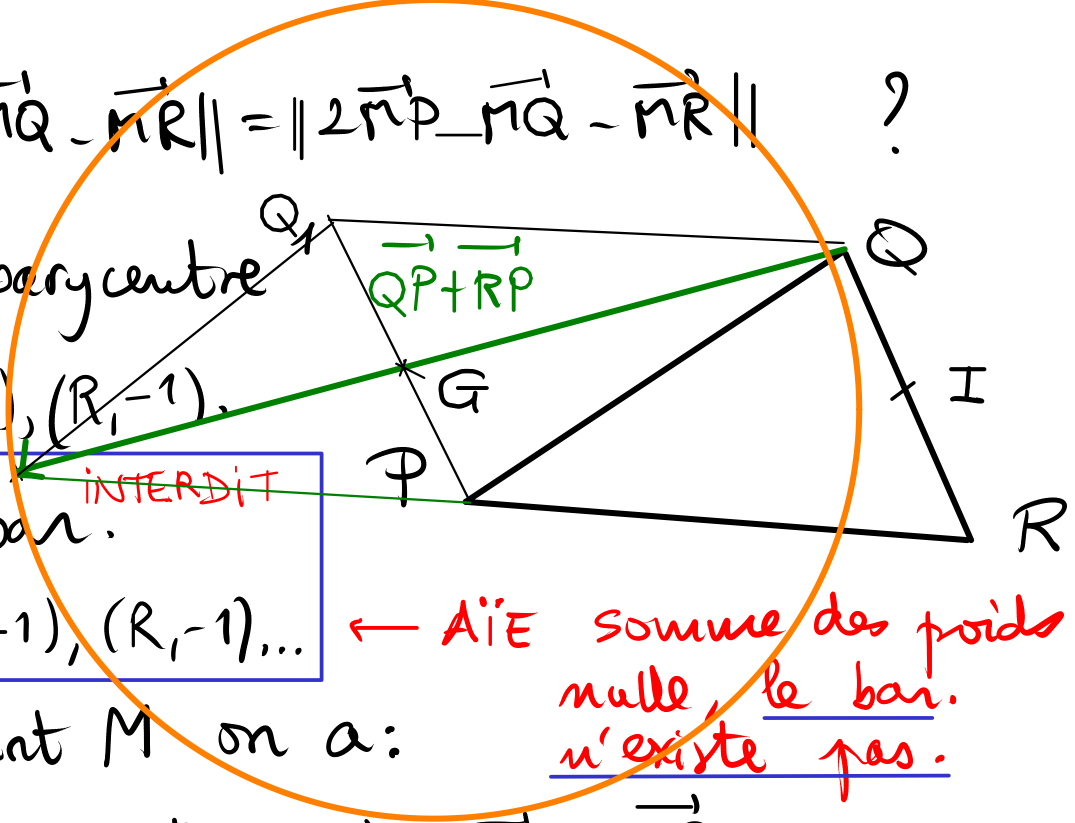
L'ens. solution est le disque $D(G, 1)$

centre rayon

$\underline{\text{NB}}$ pour O=P : $\overrightarrow{PG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PQ}$

2. $\|2\vec{MP}+\vec{MQ}-\vec{MR}\| = \|2\vec{MP}-\vec{MQ}-\vec{MR}\|$?

Soit G le barycentre de $(P,2),(Q,1),(R,-1)$.



$\boxed{\text{Soit } H \text{ le bar. de } (P,2),(Q,-1),(R,-1)\ldots}$ ← AÏE somme des poids nulle, le bar. n'existe pas.

Pour tout point M on a :

$$(2+1-1)\vec{MG} = 2\vec{MG} = 2\vec{MP}+\vec{MQ}-\vec{MR}$$

En fait : $2\vec{MP}-\vec{MQ}-\vec{MR} = 2\vec{MP}+\vec{QM}+\vec{RM}$

$= \vec{QP}+\vec{RP}$ indép. de M !!

L'énoncé se réécrit : $\|2\vec{MG}\| = \|\underbrace{\vec{QP}+\vec{RP}}_{\text{vect. fixe}}\|$

$$\Rightarrow MG = \frac{1}{2}\|\vec{QP}+\vec{RP}\|$$

L'ensemble solution est le cercle $\mathcal{C}\left(G, \frac{1}{2}\|\vec{QP}+\vec{RP}\|\right)$

Placement de G : pour $M=R$, $2\vec{RG} = 2\vec{RP}+\vec{RQ}$

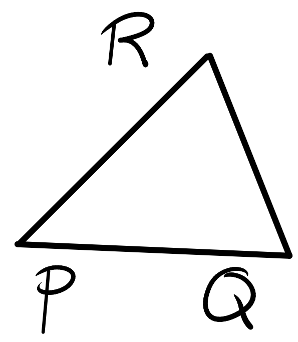
donc $\vec{RG} = \vec{RP}+\frac{1}{2}\vec{RQ}$

On voit que $\frac{1}{2}\|\vec{QP}+\vec{RP}\| = GQ$

(c'est la demi-diagonale du parallélogramme PQQ_1P_1).

Le cercle est $\mathcal{C}(G, GQ)$

3. $\|\overrightarrow{MP}+2\overrightarrow{MQ}\| = \|2\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MR}\|$



Soient G : bar. de $(P,1)$ et $(Q,2)$

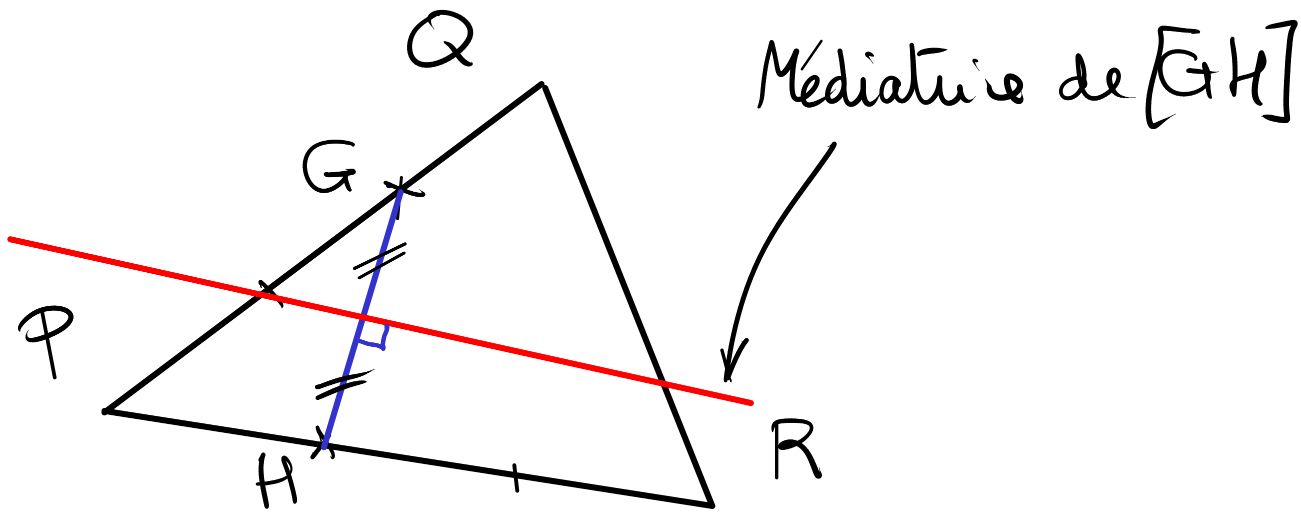
H : bar de $(P,2)$ et $(R,1)$

$$\begin{cases} 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MP}+2\overrightarrow{MQ} \\ 3\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MR} \end{cases}$$

L'énoncé s'écrit $\|3\overrightarrow{MG}\| = \|3\overrightarrow{MH}\|$

$MG = MH$

$M \in$ Médiatrice $[GH]$



Exercice 5.11 On considère les points suivants

$$P\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad Q\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse à la transformation qui envoie un point M du cercle Γ circonscrit au triangle $\{P, Q, R\}$ sur le barycentre M' des points $(P, 1), (Q, 1), (R, 1), (M, 3)$.

1. Montrer que Γ est le cercle de centre O et de rayon 1
2. Soit G le centre du gravité du triangle. Exprimer M' comme barycentre de G et de M.
3. Soit H le milieu de $\{G, O\}$. Montrer que M' est situé sur un cercle Γ' de centre H dont on déterminera le rayon.
4. On désigne par P', Q', R' les images des points P, Q, R respectivement par notre transformation. Montrer que Γ' est le cercle circonscrit au triangle $\{P', Q', R'\}$.

Je vous laisse cet exercice à chercher tranquillement à la maison.

Exercice 6.1 Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

1. 100001 par 101, 2. 656665 par 11, 3. 66227 par 13.

1. DE de 100001 par 101 :

$$100\,001 = 101 \times 990 + 11$$

2. DE de 656665 par 11 :

$$656665 = 11 \times 59696 + 9$$

3. DE de 66227 par 13 :

$$66227 = 13 \times 5094 + 5$$

les calculatrices sont interdites à l'exam.

Remarque : on peut faire des DE de polynômes ou d'objets plus compliqués (dans le cours d'algèbre...), par exemple :

$$\begin{array}{r|l} x^3-1 & x^2-1 \\ \cline{2-2} -(x^3-x) & x \\ \cline{1-1} x-1 & \end{array}$$

$$\leadsto \quad x^3-1 = x(x^2-1)+x-1$$

Exercice 6.2 Sachant que $12079233 = 75968 \times 159 + 321$, déterminer le reste de la division euclidienne de 12079233 par 75968 puis par 159.

<u>DE par 75968 :</u> $a = bq + r$ $\quad r < b$

$$\underbrace{12\,079\,233}_{} = \underbrace{75968}_{b = \text{diviseur}} \times \underbrace{159}_{q = \text{quotient}} + \underbrace{321}_{r = \text{reste}}$$

<u>DE par 159 :</u>

$$12079\,233 = \underbrace{75968}_{\cancel{\text{quotient}}} \times \underbrace{159}_{\text{diviseur}} + \underbrace{321}_{2 \times 159 + 3}$$

$$= 75968 \times 159 + 2 \times 159 + 3$$

$$= \underbrace{75970}_{\text{quotient}} \times \underbrace{159}_{\text{diviseur}} + \underbrace{3}_{\text{reste}}$$

⚠ DE : il existe un unique couple (q, r) tel que $\begin{cases} a = bq + r \\ \boxed{0 \leq r < b} \end{cases}$

☆☆☆ REM :

$$\boxed{r = 0 \iff b \mid a}$$

Exercice 6.3 Soit n un entier naturel. Quelles valeurs peut prendre le reste de la division euclidienne de 3^n par 7 ? Même question avec 38^n.

Lorsque n varie, 3^n décrit $3^0, 3^1, 3^2 \ldots$

$3^n = 7q + r$, avec $0 \leq r < 7$.

càd $r \in \{0, 1, \ldots, 6\}$.

Première remarque : $r \neq 0$, ie $3^n \not\equiv 0 \mod 7$.

Car : $r = 0 \Leftrightarrow 3^n \equiv 0 \mod 7 \Leftrightarrow 7 \mid 3^n$

Ceci est impossible car 3 et 7 sont premiers entre eux.

(Le seul nb premier qui divise 3^n est 3).

superflus

n	0	1	2	3	4	5	6	7
3^n	1	3	2	6	4	5	1	3

$27 = 7 \times 3 + 6$

inutile

$81 = 11 \times 7 + 4$

$243 = 34 \times 7 + 5$

$729 =$ calculatrice $+ 1$

$3^2 \equiv 2 \ (7)$

$3^3 \equiv 3 \times 2 \equiv 6 \ (7)$

$3^4 \equiv 3 \times 6 \equiv 4 \ (7)$

$3^5 \equiv \ldots$

Faites comme ça pour simplifier

Les valeurs prises par le reste de la DE de 3^n par 7 ($n \in \mathbb{N}$) sont $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Pour la DE de 38^n par 7 :

$$38 \equiv 3 \ (7)$$

donc $38^n \equiv 3^n \ (7)$

donc les restes sont les mêmes qu'avant.

Un exemple différent :

Les restes de la DE de 2^n par 6

n	0	1	2	3	4	5	6	
2^n	1	2	4	2	4	2	4	....

×2 ×2 ×2 ×2

$\{\text{restes}\} = \{1, 2, 4\}$

Si apparaît une valeur déjà rencontrée, toutes les colonnes suivantes seront des répétitions des col. précédentes

Exercice 6.4 1. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le nombre $4^n + 2^n + 1$ est il divisible par 7 ?
2. Même question avec $9^n + 3^n + 1$ et 13.
3. Même question avec $25^n + 5^n + 1$ et 31.

1. Conjecture (Divi) : pour tout $n \neq 0, n \in \mathbb{N}$
$7 \mid 4^n + 2^n + 1$.

Idée (Mathilde) : faire un tableau.

Remarque (Matthieu) : si $n = 3$
$4^n + 2^n + 1 = 64 + 8 + 1 = 73 \not\equiv 0\ (7)$
$\Rightarrow$ conj. de Divi fausse.

Question : lien entre 4^n et 2^n ?

Si $4^n + 2^n + 1 \equiv 0\ (7)$ et $x \overset{\text{def}}{=\!=} 2^n$

alors $\boxed{x^2 + x + 1 \equiv 0\ (7)}$

$(2^n)^2 = 2^{2n} = (2^2)^n$
$= 4^n$

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2+x+1	1	3	0	6	0	3	1

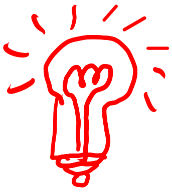
$(x^a)^b = x^{ab}$

Les seules possibilités sont
$2^n \equiv x \equiv 2$ ou 4 modulo 7

<u>1^er cas</u> $2^n \equiv 2\ (7)$

<u>2^e cas</u> $2^n \equiv 4\ (7)$

1^{er} cas $\quad 2^n \equiv 2 \mod 7$



$2 \times 4 = 8$
$\equiv 1 \ (7)$

En mult par $4 = 2^2$: $2^{n+2} \equiv 8 \equiv 1 \ (7)$

D'après l'aparté $(*)$ ceci se produit lorsque
$3 \mid n+2$

c'est-à-dire $n+2 \equiv 0 \ (3)$
$n \equiv 1 \ (3)$

$(*)$ Puissances de 2 mod 7 :

m	0	1	2	3	4	5	6
2^m	1	2	4	1	2	4	1 ....

$2^m \equiv 1 \mod 7 \iff 3 \mid m$

Récip si $n \equiv 1 \ (3)$ alors $n+2 \equiv 0 \ (3)$

donc $2^{n+2} \equiv 1 \ (7)$ d'après $(*)$

$$\begin{aligned} & 2^{n+2} \\ & \equiv \\ & 2^{n-1} \times 2^3 \\ & \equiv \\ & 2^{n-1} \end{aligned} \qquad (\text{car } 8 \equiv 1 \ (7))$$

donc $2^{n-1} \equiv 1 \ (7)$

donc $2^n \equiv 2 \ (7)$

donc $(2^n)^2 + 2^n + 1 \equiv 0 \ (7)$

$2^{ème}$ cas $\quad 2^n \equiv 4 \ (7)$

Le tableau $(*)$ montre que ceci se produit lorsque $n \equiv 2 \ (3)$. Il faut terminer...