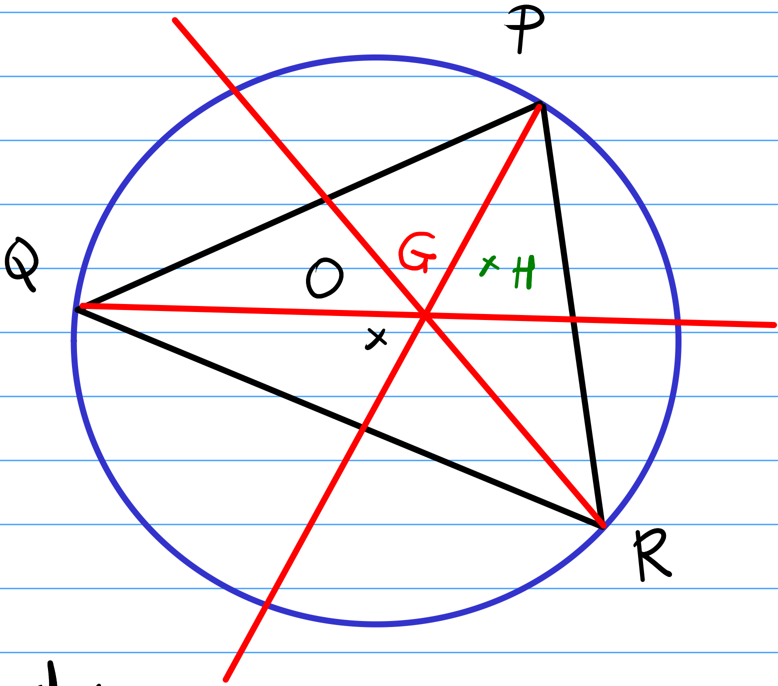
AG1
Gr 1

TD du vendredi 13 novembre 2020

Exercice 5.5 Soient $\{P, Q, R\}$ un triangle non aplati et O le centre du cercle circonscrit.

1. On désigne par H le point du plan tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$.
   (a) Montrer que $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$.
   (b) En déduire que H est l'orthocentre du triangle.
2. Montrer que, si G désigne le centre de gravité du triangle, alors O, G et H sont alignés et plus précisément que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

1. (a)



$\overrightarrow{PH} . \overrightarrow{QR} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OH}) . (\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR})$

Or l'égalité qui définit le point H implique :

$\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$.

Reprenons en remplaçant :

$\overrightarrow{PH} . \overrightarrow{QR} = (\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}) . (\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR})$

$= OR^2 - OQ^2$

qui est nul puisque O = centre du cercle circonscrit
$OP = OR = OR$

(b) Le même raisonnement peut être fait avec les autres sommets. Cela donne :

$\overrightarrow{QH} . \overrightarrow{PR} = 0$ et $\overrightarrow{RH} . \overrightarrow{PQ} = 0$

Ceci montre que H appartient aux trois hauteurs du triangle, donc c'est l'orthocentre.

2. Si G est le centre de gravité, on a

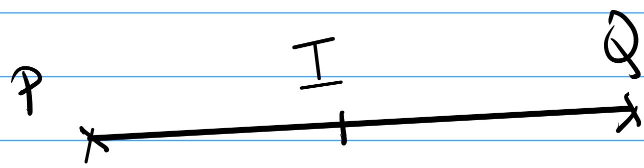
$$3\,\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

donc $3\,\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$.

En particulier O, G, H sont alignés.

Exercice 5.6 Soient P et Q deux points quelconques et I le milieu de $\{P, Q\}$.

1. Montrer que si M est un point quelconque, on a
$$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ} = MI^2 - \frac{1}{4}PQ^2.$$
2. En déduire que l'ensemble des points M du plan tels que
$$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ} = \frac{3}{4}PQ^2$$
est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.



1. $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IP}$ $\qquad \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ} = \vec{0}$!

$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IP}$

donc $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IP}).(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IP})$

$= \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IP}^2 = MI^2 - IP^2 = MI^2 - \frac{1}{4}PQ^2$

Car $I = \text{mil}\,[PQ] \Rightarrow IP = \frac{1}{2}PQ$.

Conclusion : $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = MI^2 - \frac{1}{4}PQ^2$ ✓

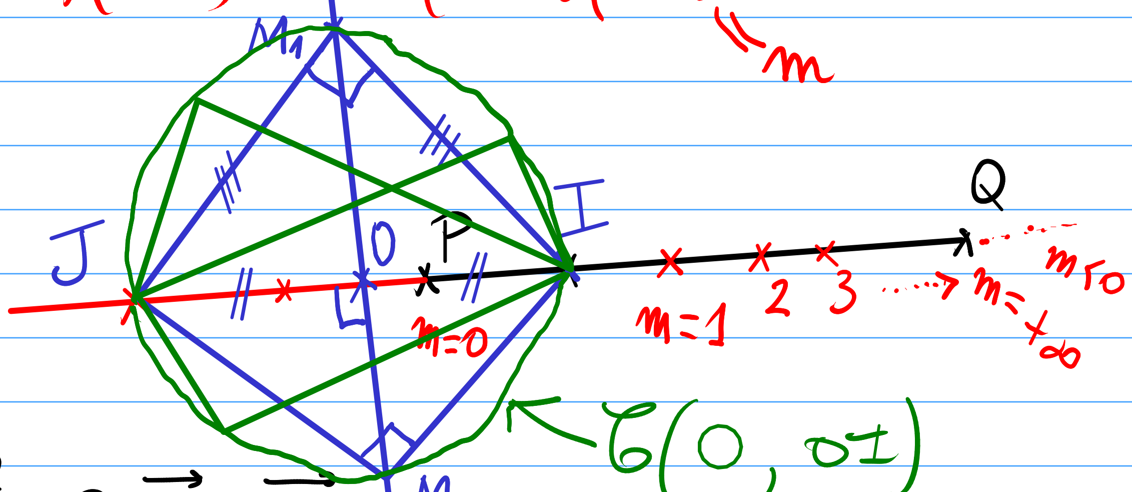
Exercice 5.7 Soient P et Q deux points quelconques, I le barycentre de $(P,3)$ et $(Q,1)$ et J le barycentre de $(P,3)$ et $(Q,-1)$.

1. Montrer que pour tout point M, on a
$$\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=\frac{9}{8}MP^2-\frac{1}{8}MQ^2.$$
2. En déduire que l'ensemble des points M du plan tels que $MP=\frac{1}{3}MQ$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

$MP = a\, MQ$

$\mathrm{bar}((P,3),(Q,-1)) = \mathrm{bar}((P,1),(Q,\underbrace{-\tfrac{1}{3}}_{m}))$

$O = \mathrm{mil}[IJ]$



$2\overrightarrow{MJ} = 3\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MQ}$

en partic $\quad 2\overrightarrow{PJ} = -\overrightarrow{PQ} \qquad \overrightarrow{PJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$

Décrivons l'ensemble des M tq $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ} = 0$:

avec $O = \mathrm{mil}[IJ]$ on a $\begin{cases} \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OI} \\ \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OJ} \end{cases}$

donc $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ} = (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OI})\cdot(\overrightarrow{MO}+\underbrace{\overrightarrow{OJ}}_{=-\overrightarrow{OI}})$

$= MO^2 - OI^2$

Ainsi $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ} = 0$ ssi $MO^2 = OI^2$

ssi $MO = OI \qquad \boxed{M \in \mathcal{C}(O, OI)}$

Exercice 5.8 Soient P et Q deux points quelconques et I le milieu de $\{P, Q\}$.

1. Montrer que si M est un point quelconque, on a

$$MP^2 + MQ^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}PQ^2.$$

2. En déduire que l'application $M \mapsto MP^2 + MQ^2$ admet un minimum que l'on déterminera.

1. Introduisons le point I avec la relation de Chasles :

$$MP^2 + MQ^2 = (\vec{MI} + \vec{IP})^2 + (\vec{MI} + \vec{IQ})^2$$

$$= (MI^2 + 2\vec{MI}\cdot\vec{IP} + IP^2) + (MI^2 + 2\vec{MI}\cdot\vec{IQ} + IQ^2)$$

$$= 2MI^2 + IP^2 + IQ^2 + 2\vec{MI}\cdot(\underbrace{\vec{IP} + \vec{IQ}}_{=\vec{0}})$$

$$= 2MI^2 + \frac{1}{4}PQ^2$$

puisque $IP = IQ = \frac{1}{2}PQ$.

2. Notons $\mathcal{P}$ le plan euclidien.

L'application est $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $f(M) = MP^2 + MQ^2$

La Q.1 a montré que $f(M) = 2MI^2 + \underbrace{\frac{1}{4}PQ^2}_{\text{constante !}}$

Comme $MI^2 \geqslant 0$, c'est minimal lorsque c'est nul c'est-à-dire $MI = 0$
$M = I$

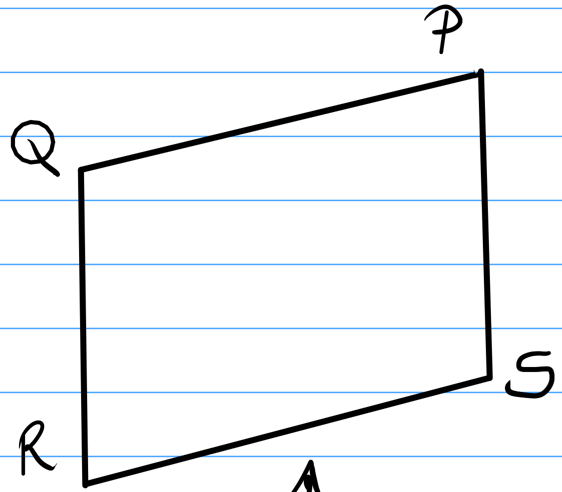
Ainsi f admet un minimum (unique) en $M = I$, il vaut $f(I) = \frac{1}{4}PQ^2$.

Exercice 5.4

1. Montrer, en utilisant une identité remarquable, que si P, Q, R, S sont des points quelconques, alors

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2 + 2\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QR} \text{ et } QS^2 = QR^2 + RS^2 + 2\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{RS}.$$

2. En déduire que « dans un parallélogramme la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des cotés ».



1. $PR^2 = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR})^2$

$= PQ^2 + QR^2 + 2\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QR}$

$QS^2 = \dots$ idem !

2. Si PQRS est un parallélogramme alors

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ donc $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \vec{0}$.

En additionnant les deux égalités de Q.1 on a :

$$PR^2 + QS^2 = PQ^2 + QR^2 + QR^2 + RS^2 + 2\overrightarrow{QR}\cdot(\underbrace{\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS}}_{\vec{0}})$$

égaux

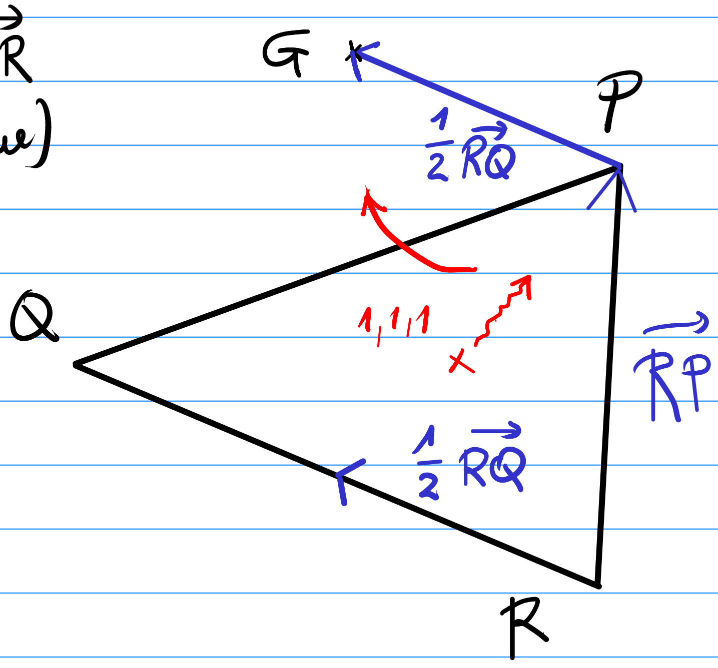
égaux

= somme des carrés des 4 côtés.

Exercice 5.9 Soient P, Q, R trois points quelconques et G le barycentre de $(P, 2)$, $(Q, 1)$ et $(R, -1)$.

1. Montrer que si M est un point quelconque, alors
$$2MP^2 + MQ^2 - MR^2 = 2GP^2 + GQ^2 - GR^2 + 2MG^2.$$
2. En déduire que l'application $M \mapsto 2MP^2 + MQ^2 - MR^2$ possède un minimum que l'on déterminera.

1. $2\vec{OG} = 2\vec{OP} + \vec{OQ} - \vec{OR}$ (pour un pt. O quelconque)



En prenant O=R :

$$2\vec{RG} = 2\vec{RP} + \vec{RQ}$$

$$\vec{RG} = \vec{RP} + \frac{1}{2}\vec{RQ}$$

On calcule

$$2MP^2 + MQ^2 - MR^2 = 2(\vec{MG} + \vec{GP})^2 + (\vec{MG} + \vec{GQ})^2 - (\vec{MG} + \vec{GR})^2$$

$$= 2MG^2 + 4\vec{MG}\cdot\vec{GP} + 2GP^2$$
$$+ MG^2 + 2\vec{MG}\cdot\vec{GQ} + GQ^2 - (MG^2 + 2\vec{MG}\cdot\vec{GR} + GR^2)$$

$$= 2GP^2 + GQ^2 - GR^2 + 2MG^2 + 2\vec{MG}\cdot\underbrace{(2\vec{GP} + \vec{GQ} - \vec{GR})}_{=\vec{0}}$$

car G = bar (...)

$$= 2GP^2 + GQ^2 - GR^2 + 2MG^2$$

comme demandé.

2. D'après 1, $f(M) = 2MG^2 + \underbrace{2GP^2 + GQ^2 - GR^2}_{=\text{constante}}$

C'est minimal lorsque $2MG^2$

... lorsque $2\,MG^2$ est minimal,

or $2\,MG^2 \geqslant 0$ donc c'est minimal

quand c'est nul : $MG = 0$ càd $\underline{M = G}$

En conclusion $f(M)$ minimal ssi $M = G$

et le minimum est $f(G) = 2GP^2 + GQ^2 - GR^2$.

Rem Et si on dérivait ?

$f(M) = 2\,MP^2 + MQ^2 - MR^2$

fonction de $M = (x, y)$ ... deux variables !

Vous saurez résoudre cet exo par "dérivation" cette année ou la prochaine !