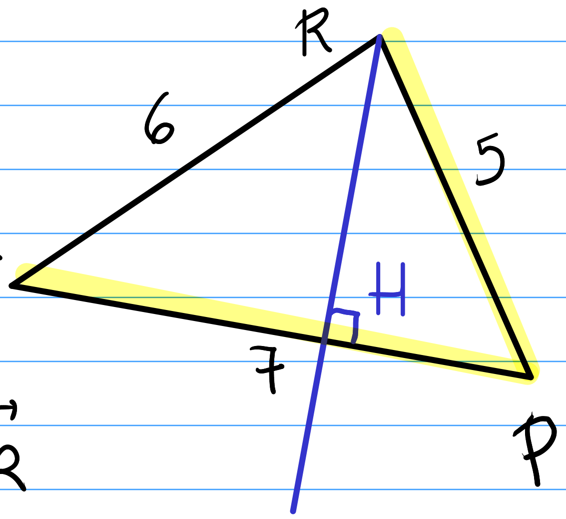
AG1
Gr 1

TD du jeudi 12 novembre

Rappel : « On fera toujours un dessin lorsque cela est possible. »

Exercice 5.1 Soit $\{P, Q, R\}$ un triangle avec $PQ = 7$, $PR = 5$ et $QR = 6$.
1. Calculer $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{PR}$ et en déduire $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$
2. Soit $H \in (PQ)$ l'unique point tel que $(RH) \perp (PQ)$. Calculer RH.



1. Adelaïde :

$$\|\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PR}\|^2 = \|\overrightarrow{QR}\|^2$$

$$\| \quad \|\overrightarrow{QP}\|^2+\|\overrightarrow{PR}\|^2+2\,\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{PR}$$

s'écrit : $6^2 = 7^2+5^2+2\,\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{PR}$

donc $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{PR} = \frac{1}{2}(36-49-25) = -19$

Albane : choix de repère : $R=(5,0)$
$P=(0,0)=$ l'origine
$Q=(x,y)$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{QR}\begin{pmatrix}5-x\\-y\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{QP}\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|\overrightarrow{QR}\|^2=(5-x)^2+y^2=36 & (L1)\\ \|\overrightarrow{QP}\|^2 = x^2+y^2=49 & (L2)\end{cases}$$

$(L2)-(L1)$: $x^2-(5-x)^2 = 13 \Rightarrow 10x-25=13$
$x = 3{,}8$
$\boxed{y = \ldots}$ superflu

NB : $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} = -5x = -19$

On déduit : $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR} = -\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{PR} = 19$ ✓

2. $\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{PH}+\overrightarrow{HR})\cdot\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{PQ} + \underbrace{\overrightarrow{HR}\cdot\overrightarrow{PQ}}_{=0}$

$= \overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{PQ} = PH \times PQ$

car $\cos(\underbrace{\overrightarrow{PH},\overrightarrow{PQ}}_{=0\ (2\pi)}) = 1$

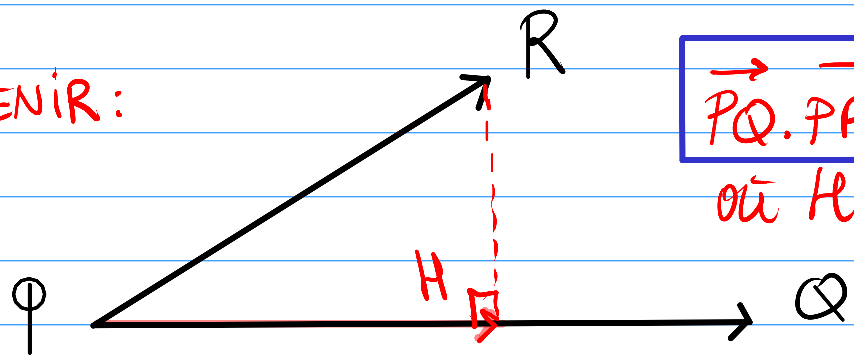
donc $19 = PH \times 7$

$\boxed{PH = 19/7}$ puis $RH = \sqrt{5^2 - (19/7)^2}$

$= \frac{1}{7}\sqrt{25\times 49 - 361} = \frac{\sqrt{864}}{7}$

or $864 = 2^5 \times 3^3$ donc $RH = \frac{12}{7}\sqrt{6}$

RETENIR :

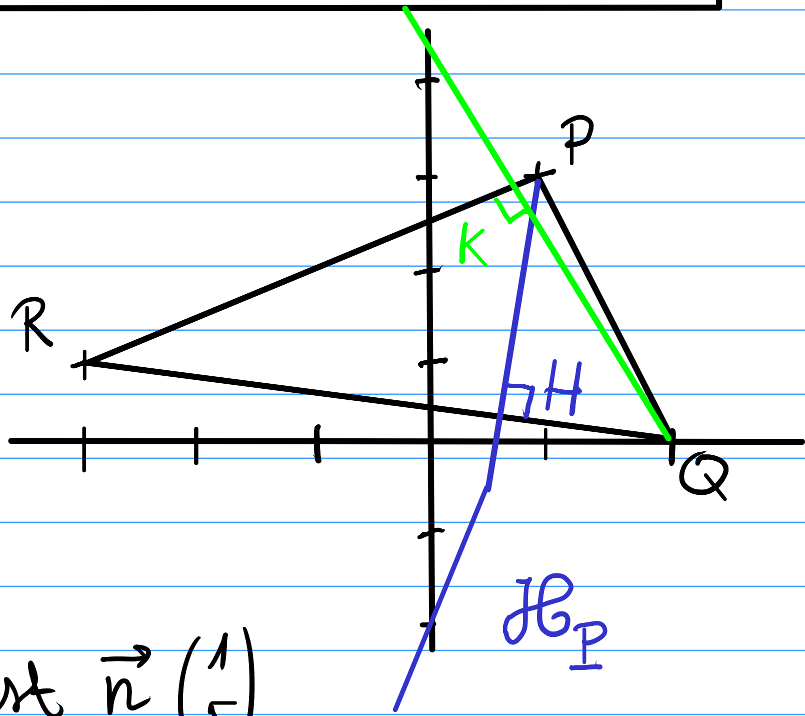


$\boxed{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PH}}$

où H = projeté orth de R sur (PQ)

Exercice 5.2 On considére le triangle $\{P\binom{1}{3}, Q\binom{2}{0}, R\binom{-3}{1}\}$.

1. Déterminer une équation de la hauteur issue de P.
2. Déterminer une équation de la hauteur issue de Q.
3. En déduire les coordonnées de l'orthocentre.



1. Equation de $\mathcal{H}_P$:

idées ??

Indic : utiliser le prod. scalaire !

$\overrightarrow{QR}\binom{-5}{1}$

Un vecteur normal est $\vec{n}\binom{1}{5}$

La hauteur passe par P, on trouve

$$-5(x-1)+y-3=0$$

$$y=5x-2$$

NB : $M \in \mathcal{H}_P \Leftrightarrow (MP) \perp (RQ) \Leftrightarrow \overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{RQ}=0$

Or $\overrightarrow{PM}\binom{x-1}{y-3}$ $\overrightarrow{RQ}\binom{5}{-1}$ donc ceci s'écrit :

$5(x-1)-(y-3)=0$ ⇝ même résultat,

2. $M \in \mathcal{H}_Q$ ssi $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{RP}=0$

ssi $\binom{x-2}{y}\cdot\binom{-4}{-2}=0$

ssi $4(x-2)+2y=0$ $\boxed{y=-2x+4}$

3. Coordonnées de l'orthocentre $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

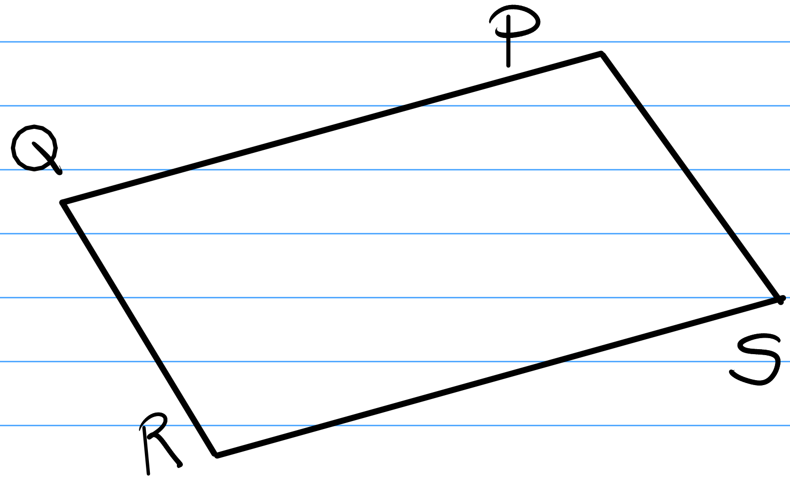
$L \in \mathcal{H}_P \cap \mathcal{H}_Q$ donc

les coord vérifient $\begin{cases} y = 5x - 2 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$

donc $x = \frac{6}{7}$ $y = \frac{16}{7}$

Exercice 5.3 Soit (P, Q, R, S) un parallélogramme à sommets (tous) distincts.

1. Montrer, en utilisant une identité remarquable, que $PR^2 - QS^2 = 4\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS}$.
2. En déduire que (PQ) et (PS) sont perpendiculaires si et seulement si $PR = QS$ (rectangle).
3. Montrer, en utilisant une identité remarquable, que $PQ^2 - QR^2 = \overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{SQ}$.
4. En déduire que (PR) et (QS) sont perpendiculaires si et seulement si $PQ = QR$ (losange).



1. $PR^2 = \overrightarrow{PR}^2 = \dots$

notation pour $\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PR}$

$PR^2 - QS^2$ $\left(= (PR+QS)(PR-QS) \quad \text{moins pertinent ici !}\right)$

$\| $

$\overrightarrow{PR}^2 - \overrightarrow{QS}^2 = (\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{QS})\cdot(\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{QS}) \quad (\star)$

Or $\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SR}-\overrightarrow{QR}-\overrightarrow{RS} = 2\overrightarrow{SR} = 2\overrightarrow{PQ}$

somme $= 0$ car $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$ (▱)

et $\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS}+\underbrace{\overrightarrow{SR}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS}}_{}= 2\overrightarrow{PS}$

somme $= 0$ car $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS}$

On revient au calcul de $(\star)$:

$$PR^2 - QS^2 = 2\overrightarrow{PQ}\cdot 2\overrightarrow{PS} = 4\,\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS} \checkmark$$

Autre méthode : $PR^2 = (\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR})^2 = PQ^2 + QR^2 + 2\,\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS}$

$QS^2 = (\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS})^2 = QR^2 + RS^2 - 2\,\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS}$

et on fait la différence (noter : $PQ = RS$) ...

??

2. Déduire : $(PQ) \perp (PS)$ ssi $PR = QS$ (ssi rectangle)

En effet, $(PQ) \perp (PS) \Leftrightarrow \vec{PQ} \cdot \vec{PS} = 0$

donc d'après Q.1 $\Leftrightarrow PR = QS$,

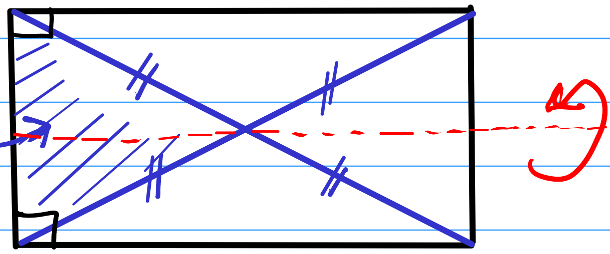
Rem : un ▱ a ses diag de m̂ longueur ssi c'est un rectangle car :

Pas si facile que ça !

Rectangle $\Leftrightarrow$ 4 angles égaux

$\Leftrightarrow (\vec{PQ}, \vec{QR}) = (\vec{QR}, \vec{QP})$

isocèle



Les diag sont de même longueur ssi les 4 triangles hachurés sont isocèles → symétrie axiale

→ angles aux sommets égaux

3. $PQ^2 - QR^2 = \vec{PQ}^2 - \vec{QR}^2$ $[a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$

$= (\vec{PQ} + \vec{QR}) \cdot (\vec{PQ} - \vec{QR})$ $\vec{PQ} = \vec{SR}$!

$= \vec{PR} \cdot (\vec{SR} - \vec{QR})$

$= \vec{PR} \cdot \vec{SQ}$ d'après la rel. de Chasles.

4. $(PR) \perp (QR) \iff \vec{PR} \cdot \vec{QS} = 0$

$\iff PQ = QR$ par Q.3.

$\iff$ tous côtés ont m longueur

$\iff$ PQRS est losange.