Exercice 5.5
1.a)
$\vec{OH} = \vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{OH} - \vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{OR} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{PO} + \vec{OH}(= \vec{PH}) = \vec{OQ} + \vec{OR}$

D'où :
$(\vec{PH}).(\vec{QR}) = (\vec{OQ} + \vec{OR}).(\vec{OR} - \vec{OQ}) = ||\vec{OR}||^2 - ||\vec{OQ}||^2$
O est le centre du cercle circonscrit au triangle, donc $||\vec{OQ}|| = ||\vec{OR}||$
Ainsi :
$(\vec{PH}).(\vec{QR}) = ||\vec{OR}||^2 - ||\vec{OQ}||^2 = 0$

1.b)
Même raisonnement que pour la question précédente, avec $(\vec{QH}).(\vec{PR})$ et $(\vec{RH}).(\vec{PQ})$
(On a $(\vec{QH}).(\vec{PR}) = (\vec{OR} + \vec{OP}).(\vec{OR} - \vec{OP}) = ||\vec{OR}||^2 - ||\vec{OP}||^2 = 0$ et $(\vec{RH}).(\vec{PQ}) = (\vec{OQ} + \vec{OP}).(\vec{OQ} - \vec{OP}) = ||\vec{OQ}||^2 - ||\vec{OP}||^2 = 0$)

H est situé sur les droites qui contiennent les hauteurs issues de P, de Q et de R.
Il est donc à l'intersection de ces hauteurs, c'est l'orthocentre du triangle.

2.
Si G est le centre de gravité du triangle, on peut écrire (voir Section 4) :
$\vec{GP} + \vec{GQ} + \vec{GR} = \vec{0}$
On décompose chacun de ces vecteurs :
$\vec{GO} + \vec{OP} + \vec{GO} + \vec{OQ} + \vec{GO} + \vec{OR} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad 3 * \vec{GO} + \vec{OH} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad 3 * \vec{GO} = -\vec{OH} \quad \Leftrightarrow$
$3 * \vec{OG} = \vec{OH}$