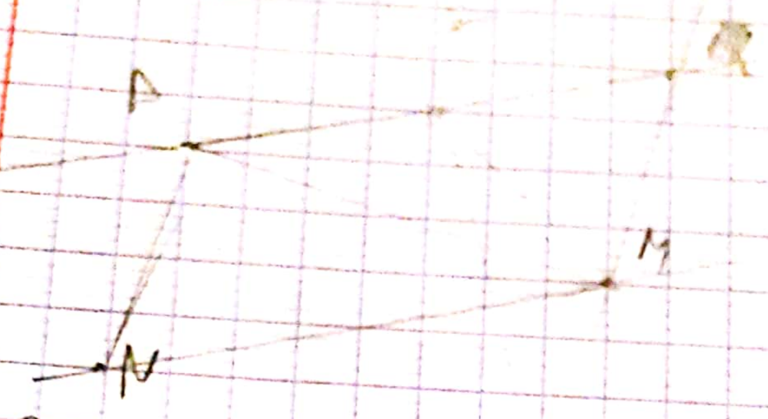
S.8




Inutile en fait —

1) (On fait apparaître N pour que PQMN soit un parallélogramme ($\vec{PN}=\vec{QM}$ et $\vec{PQ}=\vec{NM}$).)

$$MP^2+MQ^2 = \|\vec{MI}+\vec{IP}\|^2 + \|\vec{MI}+\vec{IQ}\|^2$$
$$= MI^2+IP^2+2\vec{MI}\cdot\vec{IP}+MI^2+IQ^2+2\vec{MI}\cdot\vec{IQ}$$
$$= 2MI^2+2PI^2$$

I est le milieu de PQ donc $PI=IQ$

car les produits scalaires s'annulent puisque $\vec{IP}$ et $\vec{IQ}$ sont opposés
$$\left(\begin{aligned}&2\vec{MI}\cdot\vec{IQ}+2\vec{MI}\cdot\vec{IP}\\&=2(\vec{MI}\cdot(\vec{IQ}+\vec{IP}))\\&=2(\vec{MI}\cdot\vec{0})=0\end{aligned}\right)$$

et puisque $PI=\frac{1}{2}PQ \iff PI^2=\frac{1}{4}PQ^2 \iff 2PI^2=\frac{1}{2}PQ^2$

On a bien $MP^2+MQ^2=2MI^2+\frac{1}{2}PQ^2$.

2) $M\mapsto MP^2+MQ^2$
$\iff M\mapsto 2MI^2+\frac{1}{2}PQ^2$.

On voit que $\frac{1}{2}PQ^2$ est constante dans cette application. Une distance est forcément positive donc $2MI^2+\frac{1}{2}PQ^2\geqslant 0$, $2MI^2\geqslant 0$. Ainsi le minimum possible est $\frac{1}{2}PQ^2$, atteint lorsque $2MI^2=0 \iff MI=0 \iff$ M est confondu avec I.