18) On veut résoudre

$a, b \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} a+b = 51 \\ ppcm(a,b) = 216 \end{cases}$

1.

$$\begin{array}{r|l} 51 & 3 \\ 17 & \end{array}$$

$51 = 3 \times 17$

$72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$

$$\begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$216 = 2^3 \times 3^3$

2.

$216 = 2^3 \times 3^3$ $\Rightarrow$ $pgcd(51; 216) = 3$

$51 = 3 \times 17$

$216 = 4 \times 51 + 12$

$51 = 4 \times 12 + 3$

$12 = 4 \times 3 + 0$

3.

$\text{Card } R(72) = (3+1)(2+1) = 12$

$R(72) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36; 72\}$

On a donc $72 = 1 \times 72 = 2 \times 36 = 3 \times 24 = 4 \times 18 = 6 \times 12 = 8 \times 9$

seuls $(8;9)$, $(1, 72)$ sont des décompositions de 72 en produits d'entiers premiers entre eux

$2^3 \times 3^3$

card$(R(216)) = (3+1)(3+1) = 16 \rightarrow$ nombre de diviseurs entier

$R(216) = \{1;2;3;4;6;8;9;12;18;24;27;36;54;72;108;216\}$

- pgcd$(12;18) = 3$
- pgcd$(9;24) = 3$
- $27 = 3\times 8+3$

  $8 = 2\times 3+2$

  $3 = 2+1$

- PGCD$(6,36)=6$
- $54 = 4 * 11$
- $72 = 3\times 24$
- $108 = 54\times 2$

(1, 216) et (8, 27) sont les seules décomposition de 216 en produit d'entiers premier entre eux

4. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$(S) \begin{cases} a+b = 51 & (1) \\ \text{ppcm}(a;b) = 216 & (2) \end{cases}$$

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que pgcd$(a,b) = d$

d divise pgcd$(51, 216) \Leftrightarrow d$ divise 3

$\Leftrightarrow d = 1$ ou $d = 3$

1 divise 3 $\Rightarrow$ trivial

or $d = 1 \Leftrightarrow a$ et b premier entre eux

On suppose donc maintenant que a et b ne sont pas premier entre eux et on veut montrer qu'alors, $d = 3$

Soient $a', b' \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\begin{cases} a = d a' \\ b = d b' \end{cases} \Rightarrow a' \text{ et } b' \text{ sont premier entre eux}$$

$$(S) \begin{cases} d(a'+b') = 51 \\ ppcm(da'; db') = 216 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d(a'+b') = 51 \\ d\,ppcm(a'; b') = 216 \end{cases} \begin{cases} d \text{ divise } 51 \\ d \text{ divise } 216 \end{cases}$$

or
$$51 = 3 \times 17$$
$$216 = 2^3 \times 3^3$$

3 est le seul diviseur commun de 51 et 216
donc $d = 3$

5. d'après 4) $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ vérifient $(S) \Rightarrow d = 1$ ou $d = 3$

• pour $d = 1$ $\begin{cases} a + b = 51 \\ ab = 216 \end{cases}$, a et b premier entre eux

donc d'après 3)

$$\begin{cases} a = 8 \\ b = 27 \end{cases} \begin{cases} 8+27 = 35 \neq 51 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 27 \\ b = 8 \end{cases} \begin{cases} 35 \neq 51 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 216 \end{cases} \begin{cases} 217 \neq 51 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 216 \\ b = 1 \end{cases} \begin{cases} 217 \neq 51 \end{cases}$$

• pour $d=3$

on pose $a = 3a'$, $b = 3b'$ $\Rightarrow$ a' et b' premier entre eux

$$\begin{cases} 3(a'+b') = 51 \\ 3\ \text{ppcm}(a';b') = 216 \end{cases} \quad \begin{cases} a'+b' = 17 \\ a'b' = 72 \end{cases}$$

d'après 3)

$$\begin{cases} a' = 8 \\ b' = 9 \end{cases} \quad \{ 8+9 = 17$$

$$\begin{cases} a' = 9 \\ b' = 8 \end{cases} \quad \{ 9+8 = 17$$

$$\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 72 \end{cases} \quad \{ 1+72 \neq 17$$

$a' = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{3} \notin \mathbb{N}^*$

$b' = 9 \Rightarrow b = 3$

$a' = 9 \Rightarrow a = 3$

$b' = 8 \Rightarrow b = \frac{8}{3} \notin \mathbb{N}^*$

donc il n'existe aucun couple d'entier naturels non nul (a,b) vérifiant le système