

Utilisation du théorème de Bézout

① Soient a, b, c entiers naturels non nuls. On suppose que a est premier avec b et premier avec c . Montrez qu'il est premier avec bc .

(Indication : écrire deux relations de Bézout et les multiplier entre elles)

② Soient a, b, m, n entiers naturels non nuls. Montrez que a est premier avec b ssi a^m est premier avec b^n .

(Indication : un sens est facile. Pour l'autre sens, écrire une relation de Bézout et l'élever à la puissance $m + n - 1$ à l'aide de la formule du binôme de Newton. Dans la somme obtenue, repérer quand l'exposant de a est $\geq m$ et quand l'exposant de b est $\geq n$.)

③ Soient a, b entiers naturels non nuls et $d := \text{pgcd}(a, b)$. Montrez que $\text{pgcd}(a^n, b^n) = d^n$.

(Indication : utilisez le fait que $d = \text{pgcd}(a, b)$ ssi il existe $(a', b') \in \mathbb{N}^2$ tels que $a = da'$, $b = db'$ et $\text{pgcd}(a', b') = 1$, ainsi que la question (2))

④ Soient a, b, n entiers naturels non nuls. Montrez que $a^n | b^n$ si et seulement si $a | b$.

(Indication : utilisez le fait que $x | y$ ssi $\text{pgcd}(x, y) = x$, ainsi que la question (3))