Logique et raisonnement mathématique

La logique s'intéresse d'une part aux règles de construction des phrases mathématiques, d'autre part à leur vérité.

Soit X un ensemble.

Un *énoncé*, ou une *proposition*, est une phrase mathématique dépendant des éléments de X. Un énoncé peut avoir deux valeurs, dépendant des éléments de X : *vrai* ou *faux* (1 ou 0).

On associe à chaque énoncé P la partie de X des éléments tels que P est vrai.

Exemple : pour l'énoncé « $x \geq 3$ » la partie correspondante de $\mathbb{R}$ est $[3; +\infty[$.

Par définition, si cette partie est X tout entier l'énoncé « $\forall x \in X,\ P(x)$ » est vrai.

De même, si cette partie est non vide, l'énoncé « $\exists x \in X,\ P(x)$ » est vrai.

Correspondance entre connecteurs logiques et opérations ensemblistes :

Logique	Ensemble	Symbole
P		
non P		$\neg P$
P ou Q		$P \vee Q$
P et Q		$P \wedge Q$
P implique Q		$P \Rightarrow Q$
P équivaut à Q		$P \Leftrightarrow Q$

Remarques

(1) En mathématiques le *ou* est inclusif, c'est-à-dire que (P ou Q) est vraie si et seulement si P est vraie, ou Q est vraie, ou P et Q sont vraies (alors qu'en français, si on dit « prendre fromage ou dessert », ça veut dire qu'on ne prend pas les deux).

(2) On ajoute souvent un indice à une variable quantifiée par $\exists$: « $\exists x_0 \in X$,... » pour insister sur le fait qu'on pointe là un élément *particulier*. A contrario, avec le quantificateur $\forall$ on utilise souvent une lettre neutre (sans indice) : « $\forall x \in X$, ... » pour souligner que c'est un élément *quelconque*. C'est très utile pour faciliter la compréhension.

(3) Il faut bien faire la différence entre une proposition (qui est une phrase) et sa valeur (qui est l'un des deux qualificatifs « vrai » ou « faux »). Par exemple la proposition dépendant des nombres entiers « $n(n+1)$ est impair » est un énoncé correct du point de vue des règles de logique, bien que faux pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(4) Dans les raisonnements mathématiques, on essaie de n'écrire que des énoncés justes. En conséquence, sauf exception on note simplement « P » au lieu de « P est vraie ». Par exemple on notera $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ et ça ne vient à l'idée de personne de noter : « $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ est vrai »...

Exemples (1) $X = \mathbb{N}$ et $P(n)$: n est pair ou n divise $2n$

(2) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $Q(k, n)$: (k divise n) $\iff$ ($\exists n' \in \mathbb{N}$, $n = n'k$)

(3) $X = \mathbb{R}$ et $P(x)$: $x^2 + 5x + 1 = 0$

(4) $P : \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 = 0$

(5) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ et $P(n, x) : n \geq x$

(6) $X = \mathbb{R}$ et $P(x)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq x$

(7) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x \in \mathbb{R},\ n \leq x$

(8) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \leq x$

(9) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \leq x$

(10) $\forall x \in \mathbb{R},\ (\forall y \in \mathbb{R},\ x \leq y^2) \Rightarrow x \leq 0$

(11) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x \leq y^2 \Rightarrow x \leq 0)$

• Un énoncé peut être vrai avec $\exists x \in X$ et faux avec $\forall x \in X$. (3)

• Le choix de l'ensemble des éléments est (bien sûr) très important. (4)

• Un énoncé peut porter aussi sur les éléments de plusieurs ensembles. (5)

• Soit un énoncé P dépendant des éléments de plusieurs ensembles : $P(x, y, z, \dots)$. Alors en écrivant « $\forall x \in X,\ P(x, y, z, \dots)$ » ou « $\exists x_0 \in X,\ P(x, y, z, \dots)$ » on forme un nouvel énoncé $Q(y, z, \dots)$ qui dépend de tous les ensembles de départ *sauf* X. (5 et 6)

• L'ordre des quantificateurs est très important : d'ailleurs une proposition qui est vraie (7) peut être fausse si on le change (8). En revanche, on peut toujours échanger deux quantificateurs identiques (9).

• L'utilisation de parenthèses est parfois nécessaire, et des parenthèses placées différemment donnent des énoncés différents (éventuellement l'un vrai (10) et l'autre faux (11)).

• La négation de $\forall$ est $\exists$ et la négation de $\exists$ est $\forall$. Plus précisément, la négation de $(\forall x \in X,\ P(x))$ est $(\exists x_0 \in X$, non $P(x_0))$. La négation de $(\exists x_0 \in X,\ P(x_0))$ est $(\forall x \in X$, non $P(x))$.

• Dans un énoncé du type « $\forall x \in X,\ P(x)$ » ou « $\exists x \in X,\ P(x)$ », la variable x est muette c'est-à-dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre sans changer l'énoncé.

• Si $P \Rightarrow Q$ est vrai on dit que Q est une *condition nécessaire* de P, ou que P est une *condition suffisante* de Q. Si $P \iff Q$ on dit que P est une *condition nécessaire et suffisante* de Q (ou l'inverse).

Logique et langue courante

• Voici diverses formulations en français du quantificateur $\forall$:
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, x^2 est positif.
  Soit x réel. On a...
  Tout réel x vérifie...
  Quel que soit $x \in \mathbb{R}$,...
  Un (quelconque) nombre réel x a son carré positif.

• Diverses formulations en français du quantificateur $\exists$:
  Il existe $x_0 \in X$ tel que...
  Il y a un $x_0 \in X$ tel que...
  Trouvez/on a trouvé x_0 dans X tel que...
  « Le nombre entier n est de la forme $2k$ »
    pour dire « il existe k tel que $n = 2k$ »... c'est-à-dire simplement « n est pair » !

• Diverses formulations en français de l'implication :
  Si $x \geq 0$ alors...
  Quand (dès que, lorsque) $x \geq 0$, on a...
  Soit on a $x < 0$, soit...
    (c'est le « soit... soit » qui exprime une alternative, comme « ou bien... ou bien »)
  Soit $x \geq 0$. Alors...
    (c'est le « soit » qui sert à se donner un élément : il est complètement différent !)
  Puisque $x \geq 0$, alors...
  On a ... car $x \geq 0$
  Il suffit que $x \geq 0$ pour que...
  ... est nécessaire pour que $x \geq 0$.

• Diverses formulations en français de l'équivalence :
  P si et seulement si Q
  P c'est-à-dire Q
  P i.e. Q
  On a P exactement lorsqu'on a Q

Pour démontrer un énoncé du type « $\forall x \in X$, ... » on commence par : « Soit $x \in X$ »

Exercices

Exercice Log.1 Montrez que

(a) $P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)$ est la même chose que $(P \text{ et } (\text{non } Q)) \Rightarrow R$.

(b) $P \Rightarrow Q$ est la même chose que $(\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$.
On appelle cette dernière l'*implication contraposée* de $P \Rightarrow Q$.

(c) $P \iff Q$ est la même chose que $(\text{non } P \iff \text{non } Q)$.

Exercice Log.2 Écrivez les énoncés suivants sous forme de proposition mathématique avec des quantificateurs (sans autre mot de français que les connecteurs « ou, et »). On rappelle que $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ désignent l'ensemble des nombres rationnels, réels, complexes.

(a) Tout entier relatif est la différence de deux entiers naturels.

(b) La fonction f n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(c) Le module d'un nombre complexe est un nombre réel.

(d) Il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré vaut deux.

(e) Les seuls nombres entiers naturels pairs sont 2, 8 et 44.

Exercice Log.3 Maman dit à Nicolas : « Si tu ne ranges pas ta chambre, tu n'auras pas de chocolat ». Nicolas range sa chambre, mais Maman ne lui donne pas de chocolat. Pourquoi ?