Pourboire or not pourboire

Soit $a, b \in \mathbb{N}$ deux entiers strictement positifs et premiers entre eux.

Le théorème de Bézout nous dit exactement la chose suivante. Si on décidait de n'utiliser que deux types de pièces de monnaie, disons des pièces de a euro et b euro, alors on pourrait payer en espèces tous les montants entiers *en demandant au besoin aux commerçants de rendre la monnaie.* Par exemple si $a = 4$ et $b = 7$ on voit bien que pour acheter une bière à 5€[1] on peut donner 3 pièces de 4€, le commerçant rend 1 pièce de 7€, et c'est gagné.

(1) Que se passe-t-il si a et b ne sont pas premiers entre eux ?

On suppose dans toute la suite qu'on est dans un système où les commerçants ne rendent pas la monnaie. Il y a alors un certain nombre de prix qu'on ne peut pas payer exactement : dans l'exemple de la bière on est obligé de laisser au moins 2€ de pourboire (en donnant une pièce de 7€). Pour cette raison on dira que ce sont des *mauvais* prix (et les autres, des *bons* prix). On considère que 0 est un bon prix.

(2) Décrire en termes mathématiques l'ensemble des bons prix.

(3) Remplir le tableau suivant pour les petites valeurs de a et b : tous les couples (a, b) tels que $2 \leq a \leq 7$ et $2 \leq b \leq 7$.

a	b	Ensemble des mauvais prix
2	3	
2	5	
2	7	
$\vdots$	$\vdots$	

Que constatez-vous ?

Soit m le plus grand mauvais prix (présumé) dans les 11 exemples ci-dessus.

(4) Ajoutez deux colonnes au tableau, une pour m et une pour $m + a + b$. Pouvez-vous proposer une formule $m = f(a, b)$ pour m ?

(5) Démontrez cette formule en deux étapes : d'abord montrez que $f(a, b)$ n'est pas un bon prix, ensuite, montrez que tout prix $p > f(a, b)$ est un bon prix.

(*Indication* : utilisez le lemme de Gauß puis l'écriture de Bézout unique de la feuille d'exercices (e).)

[1] Malheureusement les bonnes bières belges en bouteille atteignent facilement ce prix.

(6) Montrez que m est impair.

On sait maintenant qu'il n'y a qu'un nombre fini de mauvais prix ; on veut les compter.

(7) Soit E l'ensemble $\{0, 1, \ldots, m\}$. Montrez que la fonction

$$i\colon E \to E \qquad \text{telle que} \quad i(x) = m - x$$

échange les mauvais prix et les bons prix. (*Indication* : utilisez l'écriture de Bézout unique.)

(8) Déduisez-en le nombre de mauvais prix.

(9) Vérifiez le résultat sur les exemples du tableau.

(10) Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels premiers entre eux tels que le nombre de mauvais prix soit égal à 26.