Pourboire or not pourboire

Résumé des épisodes précédents

Soit $a, b \in \mathbb{N}$ deux entiers strictement positifs et premiers entre eux. On dispose de deux types de pièces, de a€ et b€. Ceci étant fixé, les *bons prix* sont ceux qu'on peut payer exactement sans nécessiter un rendu de monnaie (ou un laisser de pourboire). Les autres sont les *mauvais prix*.

La formule du nombre de façons différentes de payer une somme n

Par une méthode qui dépasse le cadre du cours, on peut calculer le nombre de façons différentes de payer une somme n avec les pièces de a€ et b€. On l'appelle $N(n)$: précisément c'est le nombre de couples $(\lambda, \mu) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = \lambda a + \mu b$. En particulier, pour les mauvais prix ce nombre est nul. On obtient la formule suivante :

$$N(n) = \frac{1}{2a} \sum_{i=1}^{a-1} \frac{\sin\left((2n+b)\frac{i\pi}{a}\right)}{\sin\left(\frac{bi\pi}{a}\right)} + \frac{1}{2b} \sum_{j=1}^{b-1} \frac{\sin\left((2n+a)\frac{j\pi}{b}\right)}{\sin\left(\frac{aj\pi}{b}\right)} + \frac{2n+a+b}{2ab}$$

Attention : comme on s'en rend compte rapidement, cette formule ne résout pas vraiment le problème de trouver les bons et les mauvais prix, et en particulier elle ne permet pas de trouver le plus grand mauvais prix. En effet on est bien incapable de dire sous quelles conditions (sur n) le nombre $N(n)$ est nul ou pas.

Donnons des examples. Pour $a = 2$ et $b = 3$, la formule donne

$$N(n) = \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{\sin\left((n+1)\frac{2\pi}{3}\right)}{3\sqrt{3}} - \frac{\sin\left((n+1)\frac{4\pi}{3}\right)}{3\sqrt{3}} + \frac{2n+5}{12}$$

(Il faut tenir compte du fait que $\sin\left((2n+3)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1}$ et $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$.) Le membre de gauche de la formule est a priori un nombre réel. Il n'est pas du tout évident que c'est en fait un nombre entier : ça ne se voit pas « à l'oeil nu » !

Exemples :

- $N(1) = 0$: 1 est un mauvais prix.
- $N(5) = 1$: il n'y a qu'une façon de payer 5€, à savoir 1 pièce de 2 et 1 pièce de 3.
- $N(13) = 2$: on peut payer 13€ avec 5 pièces de 2 et 1 pièce de 3, ou 2 pièces de 2 et 3 pièces de 3.