Exercice : *Samy range 461 pots de yaourt dans des caisses. Il ne commence pas une caisse avant d'avoir fini la précédente. À la fin il a rangé les pots dans 14 caisses. Combien de pots contiennent les caisses pleines ? Combien de pots contient la dernière caisse ?*

Comme 461 n'est pas divisible par 14, la dernière caisse n'est pas pleine. On a donc 13 caisses pleines et 1 caisse commencée non pleine.

Soit n le nombre de pots de yaourt que contient une caisse pleine, et r le nombre de pots de yaourt dans la dernière caisse, on a donc :

(1) $461 = 13n + r$

(2) $0 < r < n$.

Il s'agit de la division euclidienne de 461 par n, **et non par 13 ou même 14** ! Le problème est qu'on ne peut pas l'effectuer numériquement puisqu'on ne connaît pas n. Par contre, on peut encadrer n en partant de (2) et en ajoutant $13n$:

$$13n < r + 13n = 461 < 14n$$

La première inégalité donne $n \leq 35$ et la deuxième $33 \leq n$. Donc $33 \leq n \leq 35$. Cela donne trois solutions :

(1) $n = 33$, $461 = 13 \times 33 + 32$. Ce sont des caisses de 33 pots et la dernière en contient 32.

(2) $n = 34$, $461 = 13 \times 34 + 19$. Des caisses de 34 pots et la dernière en contient 19.

(3) $n = 35$, $461 = 13 \times 35 + 6$. Des caisses de 35 pots et la dernière en contient 6.