Examen de Mathématiques

L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit.
Il est conseillé aux candidats de lire le sujet en entier avant de commencer.

Exercice 1

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs.

1. Rappelez la définition des nombres entiers relatifs pairs et impairs.

2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le nombre $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 3, par 5, et par 15.

Exercice 2

1. Énoncez le théorème de décomposition en facteurs premiers des entiers naturels.

2. Soit le nombre entier $n = 30! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times 29\times 30$. Combien y a-t-il de zéros à la fin de l'écriture décimale de n ? Vous observerez que, pour répondre à cette question, on n'a besoin de connaître, dans la décomposition en facteurs premiers de n, que la partie correspondant à certains nombres premiers.

3. Soit x un nombre entier naturel dont l'écriture décimale a trois chiffres. On suppose que ses trois chiffres sont égaux : $x = \overline{kkk}_{(\text{dix})}$ avec $1 \leq k \leq 9$. Montrez que 37 divise x.

4. Calculez le pgcd de n et de x.

Exercice 3

Étant donnés trois points R, S, T du plan, on note $\mathcal{A}(RST)$ l'aire du triangle qu'ils définissent. Si ces points sont alignés on considère que $\mathcal{A}(RST) = 0$.

Soit ABC un triangle.

1. *Dans cette question, et dans cette question seulement*, on considère un point M du plan n'appartenant ni à la droite (AC) ni à la parallèle à (BC) passant par A. On appelle N le point d'intersection de (AM) et de (BC). Montrez que, dans ce cas,

$$\frac{\mathcal{A}(MAB)}{\mathcal{A}(MAC)} = \frac{NB}{NC}$$

(observez que les triangles MAB et MAC ont une base commune).

2. Déterminez l'ensemble des points M du plan tels que $\mathcal{A}(MAB) = \mathcal{A}(MAC)$, en veillant à rédiger soigneusement. Donnez en particulier l'ensemble des points M intérieurs au triangle et tels que $\mathcal{A}(MAB) = \mathcal{A}(MAC)$.

3. Déduisez de 2. que les trois médianes de ABC sont concourantes.

4. Sur un dessin, hachurez la partie des points M intérieurs au triangle tels que l'aire $\mathcal{A}(MAB)$ soit supérieure ou égale à la fois à $\mathcal{A}(MAC)$ et à $\mathcal{A}(MBC)$ (on ne demande pas de justification pour cette question).