Indications pour les exercices (feuilles d, e, f)

Exercice d.5 Cherchez d'abord les solutions avec $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$, en utilisant l'indication (et un exercice qu'on a déjà fait : a^n divise b^n ssi a divise b). Vous devez tomber sur une nouvelle équation $x^{k-1} = k$; montrez qu'elle n'a pas de solution si $k \geq 3$. Trouver toutes les solutions $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ n'est ensuite pas trop difficile, et surtout moins intéressant (vous pouvez laisser tomber).

Réponse : les couples (x, x) *avec* $x \neq 0$*, ainsi que* $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(-2, -4)$, $(-4, -2)$

Exercice d.6 Factorisez l'expression algébrique $x^3 + y^3$. Les deux facteurs doivent être parmi les diviseurs de 217 dans $\mathbb{Z}$. Prenez ces diviseurs cas par cas et résolvez.

Réponse : les couples $(9, -8)$, $(8, -9)$, $(1, 6)$, $(6, 1)$

Exercice e.2 Pensez par exemple au cas où les entiers sont premiers entre eux : $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a, c) = 1$.

Exercice e.3 Cet exercice est difficile. Il est facile de trouver une période que l'on soupçonne être la plus petite, mais ce n'est pas facile de montrer que c'est en effet la plus petite.

D'abord la première chose c'est de se rappeler la définition : on dit qu'un nombre réel T est une période pour f ssi on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$. Alors il existe une plus petite période strictement positive T_0, et l'ensemble de toutes les périodes de f est l'ensemble des multiples de T_0 dans $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire

$$\{\dots, -2T_0, -T_0, 0, T_0, 2T_0, \dots\}$$

Posons $g_1(x) = f(x) + 21^2 f''(x)$ et $g_2(x) = f(x) + 35^2 f''(x)$ où f'' désigne la dérivée seconde de f. Calculez f'', g_1, g_2 (ce qui doit vous faire comprendre pourquoi on choisit ces fonctions). Attention à ne pas se tromper en dérivant ! D'autre part montrez que si T est une période pour f alors c'est une période pour f'', g_1, g_2 (cf définition d'une période). Déduisez-en le résultat.

Réponse : 210π

Exercice e.5 Si vous n'arrivez pas directement à trouver une relation de Bézout, appliquez l'algorithme d'Euclide.

Exercice e.6 Pour simplifier l'exercice vous pouvez supposer que $d = \text{pgcd}(a, b) = 1$. Ça n'enlèvera pas gand'chose à son intérêt (mais vous n'êtes pas obligés !).

Pour (2) utilisez le lemme de Gauss.

Pour (3), une fois démontré que b divise $\lambda - \lambda_0$ i.e. il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda - \lambda_0 = kb$, vous avez de manière symétrique : a divise $\mu - \mu_0$ donc il existe ℓ tel que... Reportez cela dans l'équation $d = \lambda a + \mu b$ et trouvez une relation entre k et ℓ. Concluez.

Exercice e.7 Là encore vous pouvez supposer que $d = \text{pgcd}(a, b) = 1$ pour simplifier (pas obligé !). Faites la division euclidienne de λ par b' puis utilisez le résultat de l'exercice d'avant (qui vous indique quels sont tous les λ possibles dans un couple de Bézout pour a et b !).

Exercice e.8 (1) Montrez que d doit diviser m, et que c'est une condition nécessaire et suffisante.

(2) Ici d et m sont fixés et on cherche a et b. On a $m = de$. Écrivez la DFP $e = p_1^{\epsilon_1} \dots p_\nu^{\epsilon_\nu}$ où ν est le nombre de facteurs premiers de $e = m/d$, comme anoncé ([1]). Des entiers a et b tel que $\text{pgcd}(a, b) = d$ et $\text{ppcm}(a, b) = m$ doivent être divisibles par d et diviser m donc de la forme $a = dp_1^{\alpha_1} \dots p_\nu^{\alpha_\nu}$ avec $0 \leq \alpha_i \leq \nu_i$ (et idem pour b). Il faut que vous exprimiez le fait que le pgcd de a et b est égal à d, puis compter les couples (a, b) qu'on obtient ainsi, et conclure.

Exercice e.9 Utilisez l'exercice précédent : on a $m = dk$, remplacez dans l'équation proposée, déduisez que $d|78$... et résolvez. Il faut chercher d'abord les couples (m, d), puis pour chacun de ces couples, les ouples (a, b). Éventuellement aidez-vous de l'exercice précédent.

Réponse : une seule solution $a = 4$ et $b = 18$

Exercice e.10 Cet exercice également est délicat.

(1) Faites une récurrence sur n en utilisant le fait que le fonction est strictement croissante.

(2) $f(15) < f(18)$, puis utilisez le fait que $f(mn) = f(m)f(n)$ *lorsque m et n sont premiers entre eux* (attention !). Il faut aussi utiliser le fait que $f(9) < f(10)$.

(3) Récurrence sur n. Pour faire la récurrence utilisez la question (1) et le fait que $2^{n+1} + 1 < 2^{n+1} + 2 = 2(2^n + 1)$.

(4) l'idée est que les nombres $2^n + 1$ « encadrent » tous les nombres jusqu'à l'infini. Précisément, supposez qu'il existe un n tel que $f(n) > n$, et cherchez à aboutir à une contradiction avec la question (3).

Exercice f.1 (4) On a $2^{32} + 1 = 641 \times 6700417$ et 6700417 est premier. Il faut le faire avec un programme sur ordinateur (ma calculatrice a mis plusieurs minutes à repondre).

Exercice f.4 (2) La suite n'est pas bornée, et pour le montrer il faut trouver deux nombres premiers successifs p_{k-1} et p_k arbitrairement loin l'un de l'autre (ce qui veut dire, étant donné n il faut trouver p_{k-1} et p_k distants de n au moins). Pour cela regardez la question (1) !

Exercice f.5 On peut calculer la DFP de $100! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 99 \times 100$ (c'est un peu long) mais on n'a pas besoin de connaître tous les facteurs : quels sont ceux qui contribuent à faire apparaître des zéros dans l'écriture décimale ?

Réponse : 22

Exercice f.6 (1) Écrivez les DFP de a, b, c puis celles de pgcd(pgcd(., .).). Inspirez-vous du dernier paragraphe du cours.

(2) et (3) La réponse est non à chaque fois. Il faut donner des contre-exemples !

Exercice f.7 (2) Il faut utiliser la DFP de tous les nombres en jeu, et bien exprimer le fait que les a_i sont premiers entre eux (cf ex. f.3). (Dans le cas $n = 2$ on a seulement a_1, a_2).

(3) Là encore c'est non. Il faut donner un contre-exemple.

[1] Un trait de fraction en Arithmétique ! C'est une erreur de ma part.