Examen de Mathématiques

— Durée : 3 heures —

L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit.
Il est conseillé aux candidats de lire le sujet en entier avant de commencer.
Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (3,5 points)

Soient les nombres $a = 323$ et $b = 1197$.

1. Décomposer a et b en facteurs premiers et en déduire leur pgcd. Donner la décomposition en facteurs premiers de leur ppcm.

2. Retrouver le pgcd de a et b en utilisant l'algorithme d'Euclide.

3. Donner l'écriture de a en base 4.

4. Donner le dernier chiffre de l'écriture décimale de $b^a = 1197^{323}$.

Exercice 2 (4 points)

Pour faire la figure de cet exercice on recommande de tracer d'abord le cercle $\mathscr{C}$ (éventuellement à la main, proprement) puis le triangle ABC.

Soit ABC un triangle. On souhaite montrer que les symétriques de l'orthocentre H (intersection des hauteurs) par rapport aux côtés appartiennent au cercle circonscrit $\mathscr{C}$. On appelle O le centre de $\mathscr{C}$ (intersection des médiatrices), D le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à A et I le milieu de $[BC]$.

1. En prouvant que ses côtés sont parallèles 2 à 2, démontrer que $BDCH$ est un parallélogramme.

2. Démontrer que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}$ en utilisant le théorème de Thalès dans des triangles bien choisis.

3. On note s la réflexion d'axe (BC) et s' la réflexion d'axe la droite parallèle à (BC) passant par O. Indiquer, sans justification, la nature de la transformation composée $t := s \circ s'$ et son (ses) élément(s) caractéristique(s).

4. Quelle est l'image de A par t ? En déduire que $s(H) \in \mathscr{C}$.

../..

Exercice 3 (7 points)

Les triplets pythagoriciens sont les triplets d'entiers naturels non nuls (x, y, z) solutions de l'équation

$$(\mathscr{P}) \quad x^2 + y^2 = z^2$$

Ils correspondent à des triangles rectangles à côtés entiers. Le plus célèbre d'entre eux est le triplet $(3, 4, 5)$ utilisé par les Égyptiens dès l'Antiquité pour construire des angles droits en architecture.

Dans cet exercice on détermine tous les triplets pythagoriciens. On note $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}$) l'ensemble des entiers naturels (resp. relatifs). On pourra utiliser librement le fait suivant :

« si $u \in \mathbb{N}$ et $v \in \mathbb{N}$ sont premiers entre eux, et que uv est un carré, alors u et v sont des carrés »

Dans les quatre premières questions, on considère une solution (x, y, z) telle que pgcd$(x, y, z) = 1$.

1. Donner la table des carrés modulo 4.
2. En déduire que x et y n'ont pas la même parité, et que z est impair.
3. On suppose par exemple x impair et y pair. Montrer qu'il existe des entiers u, v, w tels que $z+x = 2u$, $z - x = 2v$ et $y = 2w$. Montrer que l'équation $(\mathscr{P})$ se ramène à la nouvelle équation $uv = w^2$.
4. Montrer que u et v sont premiers entre eux (on pourra supposer qu'il existe un nombre premier p tel que $p|u$ et $p|v$ et aboutir à une contradiction avec le fait que pgcd$(x, y, z) = 1$).
   En déduire que ce sont des carrés.
5. Soit (x, y, z) une solution de $(\mathscr{P})$. Soient $d :=$ pgcd(x, y, z) et $x = dx'$, $y = dy'$, $z = dz'$ (on ne suppose plus que $d = 1$). Montrer que (x', y', z') est une solution de $(\mathscr{P})$.
6. Montrer qu'on obtient toutes les solutions de $(\mathscr{P})$ en choisissant deux entiers $a > b$ premiers entre eux et un entier quelconque d, et en considérant (quitte à échanger éventuellement x et y)
$$x = d(a^2 - b^2)\ , \quad y = 2dab\ , \quad z = d(a^2 + b^2)$$
7. Donner deux exemples de triangles rectangles à côtés entiers (x, y, z) tels que pgcd$(x, y, z) = 1$.

Exercice 4 (5,5 points)

Soient A, B, C trois points distincts qui, dans cet ordre, décrivent le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre). On introduit les trois rotations r_1, r_2 et r_3 de centres respectifs A, B, C et d'angle $\pi/3$. On construit les points $A' = r_3(B)$, $B' = r_1(C)$, $C' = r_2(A)$, ce qui forme trois triangles équilatéraux ACB', $AC'B$ et $BA'C$ à l'extérieur du triangle ABC. On veut démontrer que les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes, en un point T appelé *point de Toricelli* du triangle.

1. Soit r une rotation quelconque d'angle θ. Étant donnés deux points du plan M et N, et leurs images $M' = r(M)$ et $N' = r(N)$, rappeler sans le justifier les valeurs de la longueur $M'N'$ et de l'angle $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'})$ modulo 2π.
2. En utilisant la rotation r_1, montrer que $BB' = CC'$ et que les droites (BB') et (CC') sont sécantes en un point que l'on nomme T (calculer l'angle, défini modulo π, entre ces deux droites).
3. Montrer que $(\overrightarrow{TC'}, \overrightarrow{TB}) = \pi/3\ (\pi)$ et en déduire que T, A, C', B sont cocycliques.
4. En déduire que $(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TC'}) = \pi/3\ (\pi)$.
5. Expliquer comment calculer l'angle $(\overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TA'})$ modulo π par la même méthode qu'en 3. et 4.
6. En décomposant l'angle $(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TA'})$ en trois, démontrer que $(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TA'}) = 0\ (\pi)$. En déduire que T appartient à la droite (AA').