Exercices d'Arithmétique (s)

Exercice s.1 Dans quel système (=base) de numération a-t-on $\overline{32} \times \overline{14} = \overline{438}$? Dans quel système de numération a-t-on $\overline{27} \times \overline{25} = \overline{708}$?

Exercice s.2 Dans une certaine base b un nombre s'écrit $\overline{1254}$ et son double $\overline{2541}$. Quel est ce nombre et quelle est cette base ?

Exercice s.3 Montrez que, quel que soit l'entier n, $4^{3n} - 4^n$ est multiple de 5 ; que $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est multiple de 17.

Exercice s.4 Pour quelles valeurs de n le nombre $4^n + 2^n + 1$ est-il divisible par 7 ? Pour quelles valeurs de n le nombre $25^n + 5^n + 1$ est-il divisible par 31 ?

Exercice s.5 Trouvez tous les entiers $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant la relation $1152x - 882y = 84$.

Trouvez tous les entiers $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant la relation $1152x - 882y = 126$.

Exercice s.6 Montrez que pour tout entier $n \geq 0$ la fration $(12n + 1)/(30n + 2)$ est irréductible.

Exercice s.7 Dans cet exercice on étudie l'énoncé :

« Tout nombre n premier avec 10 a un multiple dont l'écriture décimale n'a que des 9 »

(1) Vérifiez ce résultat pour 3, 7, 9, 11. (*Pour* 7*, prenez une calculatrice.*)

(2) Le résultat est-il vrai pour les entiers non premiers avec 10 ?

Nous allons démontrer ce résultat dans le cas où n est un nombre premier. On considère donc un nombre premier p, qui est premier avec 10 (c'est-à-dire que $p \neq 2$ et $p \neq 5$).

(3) Soit i un entier tel que $0 < i < p$. Soit C_p^i le coefficient binômial. Montrez que p divise $i!(p-i)!\mathrm{C}_p^i$. Déduisez-en que p divise C_p^i. (*Indic : Lemme de Gauss !*)

(4) En utilisant la question (3) et la formule du binôme de Newton, démontrez par récurrence sur m que pour tout $m \geq 0$, $m^p - m$ est divisible par p.

(5) Déduisez-en que p divise $10^{p-1} - 1$. (*Indic : appliquez la question précédente avec* $m = 10$ *puis utilisez le lemme de Gauss.*)

(6) Donnez l'écriture décimale de $10^{p-1} - 1$.

(7) Déduisez-en le résultat désiré, pour un nombre premier.