

# Exercices d'Arithmétique (r)

**Exercice r.1** (1) Calculez le reste de la division euclidienne de  $7 \times 7 \times 7 \times 7$  par 16.

(2) Soit  $n \geq 1$  entier. Calculez le reste de la division euclidienne de  $50^n$  par 14.

**Exercice r.2** (1) Donnez la table des carrés modulo 7.

(2) Soient  $a \geq 1$  et  $b \geq 1$  entiers. Démontrez que  $7|a^2 + b^2$  si et seulement si  $7|a$  et  $7|b$ .

(3) Résoudre l'équation  $x^2 + 14y = 5$  avec  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ . (*Indication : regarder modulo 7*)

**Exercice r.3** Dans cet exercice on démontre différemment deux résultats déjà vus. Soient  $a, b, n$  trois entiers  $\geq 1$ .

(1) Démontrez que  $\text{pgcd}(a^n, b^n) = (\text{pgcd}(a, b))^n$  en utilisant la DFP.

(2) En utilisant (1), montrez que si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux et que le produit  $ab$  est un carré, alors  $a$  et  $b$  sont des carrés. (Voir exercice f.7). (*Indication : noter  $ab = n^2$  et considérer  $i := \text{pgcd}(a, n)$  et  $j := \text{pgcd}(b, n)$ . Utiliser ensuite la question (1)*)

---

(À chercher à la maison, je ferai le corrigé des questions r.4 en début de TD lundi.)

## Exercice r.4

(A) Calculez le reste de la division euclidienne de  $7^n$  par 16.

(B) Un peu plus difficile : quel est le dernier chiffre de l'écriture décimale de  $7^{(7^7)}$  ? (*Regardez les restes modulo 10 de 7, 7<sup>2</sup>, 7<sup>3</sup>...*) Comment faire pour trouver les deux derniers chiffres ?

(C) Démontrez la version générale de l'énoncé de l'exercice f.7, non restreinte au cas  $n = k = 2$ . Utilisez au choix la méthode de l'exercice f.7 ou celle de l'exercice r.3.

**Exercice r.5** (1) Donnez l'écriture en base 3 de  $3^4 - 1$ .

(2) Donnez l'écriture en base 6 de  $6^4 - 1$ .

(3) Donnez l'écriture en base 2 de  $2^5 - 1$ .

(4) Généralisation : soient  $b \geq 2$  et  $n \geq 1$  entiers, donnez l'écriture en base  $b$  de  $b^n - 1$ .

**Exercice r.6** (1) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  l'équation d'inconnues  $(x, y)$  :  $14x + 21y = 50$ .

(2) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  l'équation :  $12x + 39y = 3$ .