Calculs d'aires et de longueurs (k)

Exercice k.1 Soit ABC un triangle, soient $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ les longueurs des côtés, et α, β, γ les angles aux sommets.

(1) Démontrez la formule suivante pour l'aire du triangle : $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

(2) Déduisez-en les formules $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$. Pour cela vous pourrez exprimer $a/\sin\alpha$ comme une quantité symétrique en a, b et c.

(3) En utilisant Pythagore avec une des hauteurs du triangle, ou en calculant de deux manières la quantité $\overrightarrow{BC}^2 := \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}$, appelée carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{BC}$, montrez la formule d'Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

(4) Déduisez-en des expressions de $\sin^2\alpha$ et $\cos\alpha + 1$ en fonction de a, b, c.

Exercice k.2 On reprend les notations de l'exercice précédent (dont on pourra utiliser les résultats). Le but de cet exercice est de démontrer des formules du type « formule de Hénon », qui donnent l'aire du triangle et les valeurs des rayons des cercles inscrits du triangle, en fonction des valeurs des côtés.

On note de plus $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ le demi-périmètre du triangle, I l'intersection des bissectrices intérieures (centre du cercle inscrit) et I_A, I_B, I_C les points d'intersection des autres bissectrices, intérieures et extérieures (centres des cercles « exinscrits »). Enfin on appelle r le rayon du cercle inscrit et r_A, r_B, r_C les rayons des cercles exinscrits.

(1) Calculez les quantités $2p - 2a$, $2p - 2b$, $2p - 2c$. Puis en utilisant les questions (1) et (4) de l'exercice précédent, démontrez la formule de Hénon : $\mathcal{A}(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

(2) $(*)$ Déduisez-en la formule du rayon du cercle inscrit, appelée « formule de Hénon » : $r = \mathcal{A}/p$. Pour cela découpez ABC en les 3 triangles ABI, ACI et BCI.

(3) Calculez les angles du triangle I_ABC. En utilisant les questions (2) et (4) de l'exercice précédent, démontrez les formules : $r_A = \mathcal{A}/(p-a)$, $r_B = \mathcal{A}/(p-b)$, $r_C = \mathcal{A}/(p-c)$. On rappelle la formule trigonométrique $\cos(x) = 2\cos^2(x/2) - 1$.

(4) Montrez que $\mathcal{A}(ABC) = \sqrt{rr_Ar_Br_C}$.

Exercice k.3 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On considère les points E, symétrique de D par rapport à A, F symétrique de A par rapport à B, G symétrique de B par rapport à C, et H symétrique de C par rapport à D. Calculer l'aire du quadrilatère $EFGH$ en fonction de celle du quadrilatère $ABCD$.

(*Indic : montrez que* $\mathcal{A}(AEF) = 2 \times \mathcal{A}(ABD)$ *puis calculez* $\mathcal{A}(AEF) + \mathcal{A}(CGH)$.)